FÍSICA

Teoría y Problemas

Carlos V. Moreno
Bolívar C. Flores

FÍSICA

Teoría y Problemas

Carlos V. Moreno Medina
Profesor Principal del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Escuela Superior Politécnica del Litoral

Bolívar C. Flores Nicolalde
Profesor Titular del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Escuela Superior Politécnica del Litoral

Guayaquil –Ecuador

ACERCA DE LOS AUTORES.

Carlos V. Moreno Medina, es profesor principal de la Escuela Superior Politécnica del Litoral en el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas. Realizó sus estudios en la Escuela Superior Politécnica del Litoral donde obtuvo el título de Ingeniero Mecánico. Sus estudios de Maestría en Física Teórica los realizó en Ohio University (U.S.A.). Allí investigó en el área de Acústica Submarina. Como profesor obtuvo la distinción de Mejor Profesor del Instituto de Ciencias Físicas. Como estudiante, fue Ayudante Académico por muchos años en el área de Laboratorios de Física así como en Física Teórica. Dictó materias a nivel secundario y universitario así como de postgrado como mecánica analítica, relatividad, termodinámica estadística entre otras. Se desempeñó como Director de la Oficina de Admisiones desde el año 1993 hasta el año 1998 y luego como Director de Instituto de Ciencias Físicas de la ESPOL desde el año 2003 hasta el año 2012. Nació en la ciudad de Milagro de la Provincia del Guayas.

Decidí escribir un libro de física debido a la gran dificultad que presentan los estudiantes en entender esta materia que está acorde con las necesidades y exigencias que demandan los estudios secundarios y superiores. El texto escrito consta de muchos problemas resueltos donde se aplican los conceptos teóricos y su desarrollo en forma clara y precisa.

Bolívar C. Flores Nicolalde, es profesor Titular de la Escuela Superior Politécnica del Litoral en el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas. Realizó sus estudios en la Escuela Superior Politécnica del Litoral donde obtuvo el Título de Ingeniero Mecánico y su postgrado en Enseñanza de la Física obteniendo el grado de Magister. Como méritos académicos recibió el Diploma de Honor al Mérito Docente por haber obtenido altas calificaciones en sus labores docentes en los años 2010 y 2011. Presentó trabajos científicos-educativos en la Décima Conferencia Interamericana de Educación en Física, organizado por la Universidad de Antioquia en Colombia en el año 2009, así como también en el Primer Congreso Binacional de Investigación en Ciencia y Tecnología de la Universidades del Norte del Perú y Sur del Ecuador., en Piura, Perú en el año 2011. Presentó trabajos en "International Conference Of Physics Education" en México-ICPE 2011. Publicó su trabajo en Física Educativa titulado ´´ The effects of the application of cognitive strategies for problem solving and the implementation of Gowin's V in electric field point charges´´ en Latin American Journal in Physics Education Volumen 6, Agosto del 2012.

Decidí escribir este libro conociendo que el estudio de las ciencias en general y la Física en particular requiere un texto en el que los alumnos desarrollen habilidades de aprendizaje significativo y resolución de problemas para que los estudiantes estén siempre listos para rendir y aprobar los exámenes de exoneración o ingreso en las distintas universidades y escuelas politécnicas a nivel nacional e internacional.

Agradecimiento

Carlos V. Moreno Medina:

Mi agradecimiento a todas las personas que me apoyaron en escribir esta obra y en especial a mi esposa y mis hijos quienes fueron mi soporte para culminar con éxito este texto.

Bolívar C. Flores Nicolalde:

Agradezco en especial a mi esposa Mirella y a mis pequeños hijos Carlos, David y Andrés quienes en todo momento fueron mi apoyo y mi fuente de inspiración para culminar con éxito este libro. También a mis estimados colegas quienes con sus sugerencias acertadas contribuyeron para la culminación de esta obra.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. SISTEMAS DE UNIDADES

1.1 Medición 3

1.2 Magnitudes fundamentales y derivadas. 3

1.3 Magnitudes fundamentales en el S.I 4

1.4 Magnitudes suplementarias en el S.I 4

1.5 Magnitudes derivadas en el S.I 4

1.6 Análisis dimensional 6

1.7 Principio de Homogeneidad 7

1.8 Relación entre unidades del sistema internacional S.I con otros sistemas de unidades 8

1.9 Notación científica 9

1.10 Prefijos y sufijos 11

1.11 Tabla de prefijos y sufijos 12

1.12 Reglas de redondeo 12

1.13 Cifras significativas 16

1.14 Error absoluto o incertidumbre absoluta 17

1.15 Determinación del número de cifras significativas 17

1.16 Operaciones con cifras significativas 18

1.16.1 Suma y resta 18

1.16.2 Multiplicación y división 19

1.17 Error o incertidumbre relativa 20

CAPÍTULO 2. VECTORES

2.1 Cantidades escalares 28

2.2 Cantidades Vectoriales 28

2.3 Representación gráfica y nomenclatura de un vector 29

2.4 Operaciones con vectores 31

2.4.1 Multiplicación de un escalar por un vector 31

2.4.2 Suma de vectores 31

2.5 El vector negativo 36

2.6 Vectores colineales 36

2.7 Componentes de un vector 37

2.8 Suma de vectores por el método de las componentes rectangulares 40

2.9 Ley del coseno 46

2.10 Ley del seno 48

2.11 Resta de vectores 49

2.12 Vectores Unitarios 50

2.13 Producto escalar de un vector 55

2.14 Vectores unitarios ortogonales en tres dimensiones 58

2.15 Producto cruz 68

2.16 Producto triple escalar 71

2.17 Cosenos directores 73

CAPÍTULO 3. CINEMÁTICA EN DIMENSIÓN

3.1 Desplazamiento 85

3.2 Rapidez media 87

3.3 Velocidad media 87

3.4 Velocidad instantánea 88

3.5 Aceleración 89

3.6 Caída libre 96

3.7 Gráficos en la Física 103

3.8 Grafico posición vs tiempo 103

3.9 Grafico velocidad vs tiempo 109

3.10 Grafico aceleración vs tiempo 116

CAPÍTULO 4. CINEMÁTICA EN DOS DIMENSIONES

4.1 Movimiento en dos dimensiones 127

4.2 Ecuaciones a utilizarse 128

4.2.1 Demostrar la ecuación de la trayectoria 129

4.2.2 Calculo del alcance máximo horizontal 129

4.2.3 Ejercicio de aplicación 130

4.3 Desplazamiento Angular 135

4.4 Rapidez Angular media 136

4.5 Velocidades Angulares medias e instantáneas 137

4.6 Parámetros que ayudan a descubrir el movimiento circular 138

4.6.1 Período 138

4.6.2 Frecuencia 139

4.6.3 Relación entre período, la frecuencia y la rapidez angular 139

4.7 Aceleración Centrípeta 139

4.8 Movimiento Circular Uniforme 140

4.9 Movimiento Circular Uniformemente Variado 143

4.9.1 Aceleración Angular 143

4.10 Velocidad relativa 147

4.10.1 Aceleración Relativa 148

CAPÍTULO 5. DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

5.1 Primera Ley de Newton 157

5.2 Inercia 157

5.3 Sistemas de referencia 159

5.4 Sistema de Referencia Inercial y no Inercial 159

5.5 Masa 160

5.6 Segunda Ley de Newton 164

5.7 Tercera Ley de Newton 166

5.8 Diagrama de Cuerpo Libre 167

5.9 Fuerzas de Fricción 177

5.10 Movimiento circular uniforme 186

5.11 Aceleración centrípeta 187

5.12 Fuerza centrípeta 189

5.13 Peralte en curvas 191

5.14 Movimiento circular vertical 193

CAPÍTULO 6. TRABAJO Y ENERGÍA

6.1 Trabajo y Energía 209

6.2 Trabajo Neto o Trabajo Total 211

6.3 Potencia 214

6.4 Trabajo de una Fuerza Constante 215

6.5 Trabajo de una Fuerza Variable 216

6.6 Ley de Hooke 217

6.7 Fuerza Variable Experimentada por un Resorte 218

6.8 Gráfico Fuerza Versus Desplazamiento para una Fuerza Variable que experimenta un Resorte 219

6.8.1 Trabajo realizado por una Fuerza Externa sobre un Resorte 219

6.9 Teorema del Trabajo y la Energía 220

6.10 Energía Potencial Gravitacional 222

6.10.1 El Trabajo realizado por una Fuerza Gravitacional en Función de la Energía Potencial Gravitacional 222

6.10.2 El Trabajo realizado por una Fuerza Elástica en Función de la Energía Elástica 223

6.11 Fuerzas Conservativas 223

6.12 Fuerzas No Conservativas 224

6.13 Conservación de la Energía Mecánica 224

6.14 Conservación de la Energía para Sistemas con Fuerzas No Conservativas 226

CAPÍTULO 7. CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

7.1 Cantidad de movimiento 237

7.2 Impulso 238

7.3 Conservación de la cantidad de movimiento lineal 243

7.4 Conservación de la cantidad de movimiento durante un choque 247

7.5 Choques en una dimensión 251

7.6 Choque en dos dimensiones 255

7.7 Centro de masa 257

CAPÍTULO 8. DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO

8.1 Cuerpo rígido 268

8.2 Centro de masa 268

8.3 Eje de rotación 270

8.4 Dinámica rotacional 270

8.5 Analogía entre la primera ley de Newton para la traslación y rotación 274

8.6 Momento de Inercia 276

8.6.1 Momento de Inercia de masas puntuales 276

8.6.2 Momento de inercia de cuerpos simétricos 277

8.6.3 Teorema de Steiner o Ejes paralelos 278

8.7 Analogía entre la segunda ley de Newton para traslación y rotación 279

8.8 Energía Cinética trasnacional y rotacional 284

CAPÍTULO 9. GRAVITACIÓN UNIVERSAL

9.1 Ley de la Gravitación Universal 293

9.2 Fuerza Gravitacional 293

9.3 Gravedad sobre la superficie de los planetas 294

9.4 Orbitas de los planetas 297

9.5 Velocidad de orbitas de los planetas 298

9.6 Energía potencial gravitacional 300

9.7 Trabajo realizado para poner en órbita un satélite alrededor de un planeta 301

9.8 Velocidad de escape de un satélite 302

9.9 Energía total de un satélite en órbita 304

9.10 Leyes de Johannes Kepler 306

CAPÍTULO 10. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

10.1 Movimiento Armónico Simple 313

10.2 Ley de HooKe 313

10.3 Relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular uniforme 315

10.4 Sistema masa resorte 320

10.5 Péndulo simple 321

10.6 Consideraciones energéticas en el movimiento armónico simple 323

SISTEMAS DE UNIDADES

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN.

La Física es una ciencia teórica y experimental que estudia los fenómenos de la naturaleza. Todos los fenómenos que vivimos y experimentamos cotidianamente pueden ser estudiados por esta ciencia: la naturaleza, el cosmos, el movimiento de los cuerpos, el movimiento ondulatorio, los fluidos, temperatura, calor, los fenómenos ópticos, los fenómenos electromagnéticos, etc.

La Física se relaciona con la Química, la Biología y otras ciencias.

Tiene una relación muy estrecha con la tecnología y desde luego con lo más preciado para los seres vivos, la vida.

Como la Física es una ciencia teórica y experimental en ella se hacen observaciones y se realizan experimentos, los cuales involucran las mediciones.

Los Físicos están preocupados en el estudio desde el fenómeno más sencillo hasta buscar la explicación al origen del universo, los universos paralelos, la materia oscura, los agujeros negros, los fenómenos cuánticos y relativistas, la teoría de las cuerdas, las galaxias, las nano-ciencias, la nanotecnología, etc.

Como una herramienta importante para el estudio de esta ciencia empezaremos aprendiendo los estándares de medidas y las mediciones.

1.1 MEDICIÓN.

En Física medición es un proceso de comparación de lo que se desea medir con un elemento llamado patrón de medida, que puede ser patrón de longitud de masa, de tiempo, etc.

Estos patrones de medida, como por ejemplo: el de longitud podrían ser distintos dependiendo de cada país; pero en el año de 1960 en la XI conferencia general de pesas y medidas se acordó estandarizar los sistemas de unidades adoptándose el llamado **SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (S.I)**

Desde ese entonces la mayoría de los países han adoptado el **S.I**, pero en la actualidad una minoría todavía mantiene paralelamente su propio sistema de unidades, debido al costo que representaría el cambio al **S.I** y por otros motivos propios de cada país.

En Ecuador se adoptó el sistema Internacional de unidades en gran porcentaje como una disposición nacional, cumpliendo las exigencias internacionales desde el 9 de Enero de 1974, donde nuestro país adoptó este sistema mediante la ley N_0 1456 de pesas y medidas, promulgada en el registro oficial N_0 468, pero todavía existe una pequeña cantidad de locales que usan unidades en otros sistemas, como por ejemplo: la libra.

Las personas se dirigen hacia las tiendas y adquieren productos por libras, pero esto sucede en tiendas pequeñas. Los grandes supermercados se ajustan a las normas nacionales e internacionales y se venden los productos en kilogramos. En nuestro país es común comprar arroz, azúcar, etc., en tiendas por libras, pero en los supermercados ya está marcado su contenido en kilogramos.

En física existen las magnitudes clasificadas por su origen y por su naturaleza. Por su origen se tienen las magnitudes fundamentales y derivadas; por su naturaleza las escalares y las vectoriales.

1.2 MAGNITUDES FUNDAMENTALES Y DERIVADAS.

Entiéndase por **magnitudes fundamentales** aquellas que son principales, que no dependen de otras.

Las **magnitudes derivadas** son aquellas que dependen de las magnitudes fundamentales y resultan de la combinación de ellas.

Existen una serie de sistemas de unidades, tales como: el internacional, el métrico gravitacional, el C.G.S, el inglés, el inglés gravitacional, etc.

Cada sistema con sus propias cantidades fundamentales y derivadas, por ejemplo: el sistema internacional que cuenta con siete magnitudes fundamentales, dos suplementarias y un sinnúmero de magnitudes derivadas.

Las magnitudes fundamentales en el S.I son: longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, temperatura, intensidad luminosa y cantidad de sustancia.

La longitud está medida en metros (m), la masa en kilogramos (kg), el tiempo en segundos (s), la intensidad de corriente el Ampere (A), la temperatura en Kelvin (K), la intensidad luminosa en candela (cd) y la cantidad de sustancia en (mol).

1.3 MAGNITUDES FUNDAMENTALES EN EL S.I.

En la tabla 1.1 se puede observar las siete magnitudes fundamentales en el sistema internacional de unidades.

MAGNITUD FUNDAMENTAL	UNIDAD	SIMBOLO
Longitud	Metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente	Ampere	A
Temperatura	Kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

Tabla 1.1

1.4 MAGNITUDES SUPLEMENTARIAS EN EL S.I.

Las magnitudes suplementarias son el Radian (rad) y el Estereorradián (sr).

MAGNITUD SUPLEMENTARIA	UNIDAD	SIMBOLO
Unidad de ángulo plano	Radian	rad
Unidad del ángulo sólido	Estereorradián	sr

Tabla 1.2

1.5 MAGNITUDES DERIVADAS EN EL S.I.

Son múltiples las magnitudes derivadas que resultan de la combinación de las magnitudes fundamentales y/o suplementarias y a continuación nombraremos algunas de estas magnitudes.

En Física es muy común hablar de velocidad, aceleración, fuerza, intensidad de campo eléctrico, calor, energía, trabajo, área, volumen, potencia, caudal, presión, etc.

Las cantidades nombradas anteriormente son una parte de las cantidades derivadas.

Como por ejemplo la velocidad es la relación entre el desplazamiento y el tiempo.

La magnitud del desplazamiento viene expresada en metros, que corresponde a la unidad de la magnitud fundamental de longitud. El tiempo es una magnitud fundamental cuya unidad es el segundo (s). Las unidades de la velocidad serán la combinación de las unidades de las dos cantidades fundamentales que son la longitud y el tiempo, por lo tanto, las unidades de la velocidad serán, metro /segundo, [m/s].

Por lo tanto, es necesario presentar una lista de una parte de estas magnitudes derivadas y sus unidades correspondientes. Ver tabla 1.3

MAGNITUD DERIVADA	UNIDAD	SIMBOLO
Velocidad	Metro /segundo	m/s
Aceleración	Metro/segundo ^{2}	m/s^2
Fuerza	Newton	$kg.m/s^2$
Intensidad de campo eléctrico	Newton/Coulomb	N/C
Energía , Trabajo, Calor	Joule	$J=kg.m^2/s^2$
Unidad de superficie	Metro cuadrado	m^2
Unidad de Volumen	Metro cúbico	m^3
Potencia	Vatio	W
Ímpetu o cantidad de movimiento	Newton. Segundo	N.s=kg.m/s
Velocidad angular	Radian/segundo	rad/s=1/s
Presión	Pascal	$Pa=N/m^2=kg/s^2.m$
Entropía	Joule/Kelvin	$J/K=(m^2.kg)/(s^2.K)$

Tabla 1.3

ACTIVIDAD 1.1

ESCRIBIR 5 MAGNITUDES DERIVADAS CON SU RESPECTIVA UNIDAD Y SÍMBOLO.

1.....

2.....

3.....

4.....

5.....

ACTIVIDAD 1.2

INVESTIGAR LAS DEFINICIONES ACTUALES DE LOS PATRONES DE MEDIDA DE LAS MAGNITUDES FUNDAMENTALES EN EL SISTEMA INTERNACIONAL.

El metro se define cómo.....

.....

El segundo se define cómo.....

El kilogramo se define cómo.....

El ampere se define cómo.....

El Kelvin se define cómo.....

El mol se define cómo.....

1.6 ANALISIS DIMENSIONAL.

El análisis dimensional nos permite relacionar las magnitudes derivadas con las fundamentales, nos permite verificar la veracidad de las mismas y hallar las fórmulas a partir de datos experimentales.

En física las magnitudes fundamentales tienen su propia dimensión que se muestran a continuación. Ver tabla 1.4

MAGNITUD FUNDAMENTAL	UNIDAD	SIMBOLO	DIMENSIÓN.
Longitud	Metro	m	[L]
Masa	kilogramo	kg	[M]
Tiempo	segundo	s	[T]
Intensidad de corriente	Ampere	A	[I]
Temperatura	Kelvin	K	$[\theta]$
Intensidad luminosa	candela	cd	[J]
Cantidad de sustancia	mol	mol	[N]

Tabla 1.4

Así, la dimensión de la longitud se representa [L] y para representar la velocidad que es una magnitud derivada se usa la dimensión de la longitud dividida para la dimensión del tiempo $[V] = \frac{[L]}{[T]}$.

De la misma manera puede hallarse las dimensiones de la aceleración como las dimensiones de la velocidad $[V] = \frac{[L]}{[T]}$, dividida para la dimensión del tiempo $[T]$. $[a] = \frac{\frac{[L]}{[T]}}{[T]} = \frac{[L]}{[T^2]} = [L][T^{-2}]$.

Ejemplo 1.1

Determine la ecuación dimensional de la fuerza.

La fuerza es una magnitud derivada que es igual al producto de la masa por la aceleración

Solución.

La ecuación dimensional de la fuerza será la ecuación dimensional de la aceleración $[L][T^{-2}]$, multiplicada por la dimensión de la masa $[M]$, por lo tanto la ecuación dimensional de la fuerza es $[L][T^{-2}][M]$.

Ejemplo 1.2.

Determine la ecuación dimensional del trabajo o la energía.

El trabajo es una magnitud derivada que es la fuerza multiplicada por la distancia.

Solución.

La ecuación dimensional del trabajo será la ecuación dimensional de la fuerza $[L][T^{-2}][M]$, multiplicada por la dimensión de la distancia $[L]$, por lo tanto la ecuación dimensional del trabajo es $[L^2][T^{-2}][M]$.

La ecuación dimensional del trabajo es $[L^2][T^{-2}][M]$

ACTIVIDAD 1.3

Determine la ecuación dimensional de la cantidad de movimiento.

Si la cantidad de movimiento se define como la masa multiplicada por la velocidad. $\vec{p} = m\vec{v}$

1.7 PRINCIPIO DE HOMOGENIDAD.

Si se suman, restan, multiplican o dividen términos físicos de una ecuación, estos términos deben tener la misma dimensión.

En la ecuación del desplazamiento para el movimiento rectilíneo uniforme.$\Delta x = V_o t + \frac{1}{2}at^2$, sabemos que la dimensión del desplazamiento $[\Delta x]$ es $[L]$, por lo tanto todos los términos de la ecuación del desplazamiento deben tener la misma dimensión.

$$[L] = [\Delta x] = [V_o t] = \left[\frac{1}{2}at^2\right]$$

Los factores que son valores numéricos que aparecen en las ecuaciones como $\frac{1}{2}$, no tienen dimensiones.

La dimensión de $[V_o t] = [V][t] = [LT^{-1}][T] = [L]$
La dimensión de $\left[\frac{1}{2}at^2\right] = \left[\frac{1}{2}\right][a][t^2] = [L][T^{-2}][T^2]=[L]$

Todos los términos tienen la misma dimensión $[L]$.

Ejemplo 1.3

En la siguiente ecuación la velocidad es $v = A + Bt$. Determinar las dimensiones de A y B.

Solución.

Las dimensiones de cada término deben ser las mismas.

$$[v] = [A] = [Bt]$$

Como las dimensiones de la velocidad son $[v] = [LT^{-1}]$, entonces las dimensiones de A deben ser también $[A] = [LT^{-1}]$

Las dimensiones de [Bt]son las mismas que la velocidad $[LT^{-1}]$

$$[Bt] = [B][t] = [LT^{-1}]$$

La dimensión de de t es $[t] = [T]$, despejando las dimensiones de B se tiene:

$$[B][T] = [LT^{-1}] \rightarrow [B] = \frac{[LT^{-1}]}{[T]} = [LT^{-2}]$$

ACTIVIDAD 1.4

La siguiente ecuación de la velocidad es $v^2 = A + 2B\Delta x$. Si la dimensión de la velocidad y el desplazamiento son [v]=[LT^{-1}] , [Δx]=[L] respectivamente.

Determinar las dimensiones de A y B.

1.8 RELACIÓN ENTRE UNIDADES DEL SISTEMA INTERNACIONAL S.I CON OTROS SISTEMAS DE UNIDADES.

1 km = 1000 m

1 m =3,28 pies

1 milla terrestre =1609 m.

1 kg = 1000 g =2,2 lb

1 pie = 12 pulgadas.

1 pulgada = 2,54 cm =0,0254 m

1 Yarda =3 pies =36 pulgadas=91.4 cm

1 lb = 454 g

1 día = 24 horas =86400 s 1 hora =60 min 1 hora =36 00 s

1 N = 0,102 kgf 1 kgf = 2,2 lbf 1 kgf = 9,8 N

Ejemplo 1.4

Según la nueva ley de tránsito, los autos deben moverse a una rapidez máxima de 50 km/h en la ciudad. Determine la rapidez en m/s.

Solución.

$$50\frac{km}{h}\times\frac{1000m}{1km}\times\frac{1h}{3600s}=13.89\frac{m}{s}$$

Ejemplo 1.5

En los sacos de cemento viene impreso 50 kg. Determinar la masa en lbs.

Solución.

$$50kg\times\frac{2.2\ lbs}{1kg}=110\ lbs$$

ACTIVIDAD 1.5

Un auto se mueve con una rapidez de 90 km/h. Determine la rapidez del auto en m/s.

ACTIVIDAD 1.6

Para elaborar bocaditos se mezclan 1362 gramos de mantequilla y 22 libras de harina.

Determine la masa total de la mezcla en kilogramos.

1.9 NOTACIÓN CIENTÍFICA

En ciencias existen cantidades muy grades o muy pequeñas, como la velocidad de la luz , la distancia de la Tierra al Sol, el diámetro de un átomo, la carga y masa de un electrón, la masa de un neutrón, etc. Por lo tanto, es necesario escribir estas cantidades en Notación Científica y expresar en función de potencias de 10, con las siguientes recomendaciones:

1. Se expresa la cantidad de la siguiente forma $A.BC\times10^{N}$ donde A es un dígito diferente de cero, de 1 al 9 y puede ir acompañado de otros dígitos BC. N es el exponente de 10 y

representa el número de lugares que se traslada el punto decimal. Si el punto decimal se traslada hacia la izquierda el exponente N es positivo y si el punto decimal se mueve hacia la derecha el exponente N es negativo.

Ejemplo 1.6

La velocidad de la luz es de 300, 000,000 m/s. Expresar esta velocidad en notación científica.

Solución.
Por ejemplo, la velocidad de la luz es 300, 000,000 m/s como es una cantidad qüe está en enteros, se entiende que el punto decimal está al final y el punto decimal tiene que moverse ocho lugares a la izquierda, por lo tanto N=+8 $3{,}0 \times 10^{+8}\ m/s.$
El punto decimal se movió ocho lugares hacia la izquierda.

Ejemplo 1.7

La masa de un insecto es 0.0000125 kg. Expresar la masa en Notación Científica.

Solución.

En este caso el punto decimal debe moverse 5 lugares hacia la derecha, por lo tanto N es negativo e igual -5 y la masa queda expresada como $1.25 \times 10^{-5}\ kg$

ACTIVIDAD 1.7

Medir en cm, el espesor total de las hojas de un libro, luego dividir para el número de hojas y expresar el espesor de una hoja en notación científica en cm.

ACTIVIDAD 1.8

Medir en cm el perímetro de su cuaderno y expresarlo en notación científica en cm y en pulgadas.

1.10 PREFIJOS Y SUFIJOS.

Los prefijos y sufijos se usan en el Sistema Internacional para expresar múltiplos de cantidades fundamentales o derivadas, y para esto se le agrega al símbolo de la magnitud física una letra acompañada al símbolo y sin espacio, como por ejemplo:

Em, Pm, Tm, Gm, Mm, km, hm, dam, dm, cm, mm

Si recordamos 1km =1000 m=$\mathbf{10^{+3}}$ m. Por lo tanto, el prefijo k se lee kilo y tiene un significado de $\mathbf{10^{+3}}$. De esta manera usted podrá observar la equivalencia de los siguientes prefijos y sufijos con su valor correspondiente en potencia de diez.

Todos los sufijos y parte de los prefijos se escriben con letras minúsculas, pero a partir de los **mega** se escriben con mayúsculas, como por ejemplo: 1 megametro se escribe de la siguiente forma $\mathbf{1\ Mm = 1 \times 10^{+6}\ m}$.

Es importante recalcar que el nombre se escribe con minúscula (**megametro**)

ACTIVIDAD 1.9

Complete las siguientes analogías:

Kilo es a $\mathbf{10^{+3}}$ como mega es a .....

a) 10^{+2}
b) 10^{+13}
c) 10^{+4}
d) 10^{+6}

Centi es a $\mathbf{10^{-2}}$ como mili es a.....

a) 10^{-3}
b) 10^{+3}
c) 10^{+5}
d) 10^{+6}

ACTIVIDAD 1.10

Dada las siguientes cantidades físicas, ordenar de menor a mayor y **completar** la tabla 1.5, que se encuentra a continuación.

cm, mm, dm, m, hm, km, dam, Mm, Pm, Gm, Tm, Em, Zm

10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{+1}	10^{+2}	10^{+3}	10^{+6}	10^{+9}	10^{+12}	10^{+15}	10^{+18}	10^{+21}
mm												Zm

Tabla 1.5

1.11 TABLA DE PREFIJOS Y SUFIJOS.

Nombre	Símbolo	Valor	Potencia de diez
yotta	Y	1000000000000000000000000	10^{+24}
zetta	Z	1000000000000000000000	10^{+21}
exa	E	1000000000000000000	10^{+18}
peta	P	1000000000000000	10^{+15}
tera	T	1000000000000	10^{+12}
giga	G	1000000000	10^{+9}
mega	M	1000000	10^{+6}
kilo	k	1000	10^{+3}
hecto	h	100	10^{+2}
deca	da	10	10^{+1}
deci	d	0.1	10^{-1}
centi	c	0.01	10^{-2}
mili	m	0.001	10^{-3}
micro	μ	0.000001	10^{-6}
nano	n	0.000000001	10^{-9}
pico	p	0.000000000001	10^{-12}
femto	f	0.000000000000001	10^{-15}
atto	a	0.000000000000000001	10^{-18}
zepto	z	0.000000000000000000001	10^{-21}
yocto	y	0.000000000000000000000001	10^{-24}

Tabla 1.6

Ejemplo 1.8.
Dadas las siguientes cantidades físicas escoger la alternativa correcta usando prefijos o sufijos.
La distancia entre dos ciudades es de 400000 m, entonces, se puede expresar de la siguiente manera:

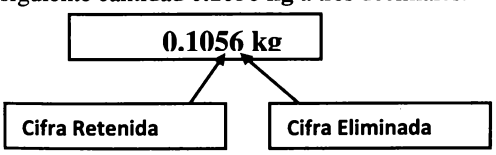
a) 400 dm
b) 400 hm
c) 400 Gm
d) 400 km

$$400000\ m \times \frac{1km}{1000m} = 400\ km$$

1.12 REGLAS DE REDONDEO.

Si después de realizar las operaciones tenemos cantidades con muchos decimales, entonces, es necesario realizar un proceso llamado redondeo que consiste en eliminar ciertos dígitos con los siguientes criterios.

1. Si la cifra a eliminarse es mayor que cinco, la cifra retenida aumenta en 1.
Ejemplo, redondear la siguiente cantidad **0.1056 kg** a tres decimales.



Como la cifra eliminada **(6)** es mayor que cinco, entonces, la cifra retenida **(5)** aumenta en **1**. Por lo tanto queda **0.106 kg.**

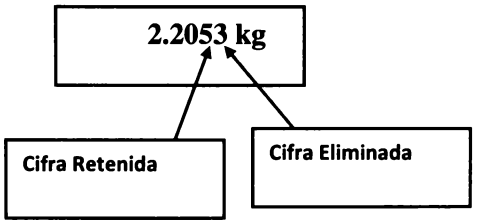
Ejemplo 1.9

Redondear las siguientes cantidades a dos decimales.

a) 1.056 m | 1.06 m

b) 2.0678 s | 2.07 m

2. Si la cifra a eliminarse es menor que cinco, la cifra retenida **NO VARÍA.**
   Ejemplo: redondear la siguiente cantidad **2.2053 kg** a tres decimales.



Como la cifra eliminada **(3)** es menor que cinco, entonces, la cifra retenida **(5)** NO VARÍA. Por lo tanto, queda **2.205 kg.**

Ejemplo 1.10.

Redondear las siguientes cantidades a dos decimales.

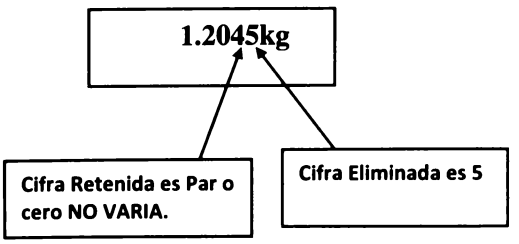
a) 3.054 kg | 3.05 kg

b) 1.062 s | 1.06 s

3. Si la cifra a eliminarse es igual a cinco, seguida únicamente de ceros o sin ceros. la cifra retenida no varía, si la cifra a eliminarse es par o cero y aumenta en 1 si es impar.

Ejemplo 1.11.

Redondear la siguiente cantidad **1.2045 kg** a tres decimales.



Como la cifra eliminada es igual a cinco y la cifra retenida es par (4) NO VARÍA. Por lo tanto queda **1.204 kg.**

Ejemplo 1.12.

Redondear las siguientes cantidades a dos decimales.

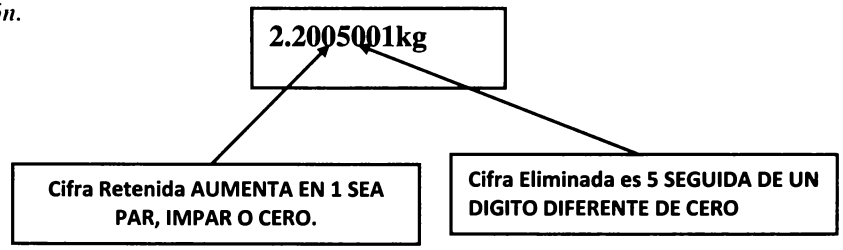
a) 3.005 kg | 3.00 kg

b) 1.035 s | 1.04 s

4. Si la cifra a eliminarse es IGUAL a cinco, seguida de algún dígito diferente de cero. La cifra retenida AUMENTA EN 1 sea par, impar o cero.

Ejemplo 1.13.
Redondear la siguiente cantidad 2.2005001 kg a tres decimales.

Solución.



Como la cifra eliminada es **igual a cinco**, seguida de un **digito diferente de cero**, entonces, la cifra **retenida aumenta en 1 sea par, cero o impar, por lo tanto la medición queda 2.201 kg.**

Ejemplo 1.14.

Redondear las siguientes cantidades a dos decimales.

a) 1.005002 kg | 1.01

b) 1.04503 s | 1.05

c) 5.2450001 m | 5.25

d) 10.335004 N | 10.34

Ejemplo 1.15.

Un auto se mueve a 35.5 millas/h. Expresar la rapidez en m/s, en notación científica y redondear a dos decimales.

$$\frac{35.5\ \text{millas}}{\text{h}} \times \frac{1609\ \text{m}}{1\ \text{milla}} \times \frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} = 15.866\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1.59 \times 10^{+1}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 1.16.

La densidad del Acero es $7.8\ \frac{g}{cm^3}$. Expresar la densidad en $\frac{kg}{m^3}$, en notación científica y con dos decimales.

$$7.8\frac{g}{cm^3} \times \frac{1\ kg}{1000\ g} \times \frac{(100\ cm)^3}{(1m)^3} = 7.80 \times 10^{+3}\frac{kg}{m^3}$$

En Física en general y en **Astronomía** en particular es muy común utilizar una unidad llamada el año luz, la misma que representa la distancia recorrida por la luz durante un año. Esta distancia (año luz), debe ser calculada de la siguiente forma $d = v \times t$.

Ejemplo 1.17.

¿Cuántos segundos hay en un año? Expresar en notación científica usando cuatro decimales

$$1\ año \times \frac{365\ \text{dias}}{1\ \text{año}} \times \frac{24\ \text{horas}}{1\ \text{dia}} \times \frac{3600\ s}{1\ hora} = \mathbf{3.1536 \times 10^{+7}\ s}$$

Ejemplo 1.18.

Si la velocidad de la luz es de $300000\frac{km}{s}$, expresar la velocidad de la luz en m/s, en notación científica usando un decimal.

$$300000\frac{km}{s} \times \frac{1000m}{km} = 3.0 \times 10^{+8}\ m/s$$

Ejemplo 1.19.

¿Cuál es la distancia en metros que representa un año luz?

Como un año luz es la distancia recorrida por la luz en un año, para calcular la distancia recorrida se usa:

$$d = v \times t = 3.0 \times 10^{+8}\frac{m}{s} \times 3.1536 \times 10^{+7}s = 9.4608 \times 10^{15}\ m$$

$$1\ \text{año luz} = 9.4608 \times 10^{+15}\text{m}$$

ACTIVIDAD 1.11

Una estrella se encuentra ubicada a 3 años luz de la Tierra, entonces la estrella está a una distancia de la Tierra en km de:

a) $2.84 \times 10^{13}km$
b) $2.84 \times 10^{15}km$
c) $2.84 \times 10^{39}km$
d) $2.84 \times 10^{45}km$

ACTIVIDAD 1.12

La distancia de la Tierra al Sol es de 149600000 km, entonces el tiempo que tarda en llegar la luz a la Tierra en segundos es de:

a) 0.4987 s
b) 498.7 s
c) 60 s
d) 3600 s
e) 1440 s

1.13 CIFRAS SIGNIFICATIVAS.

Las cifras significativas aparecen en todo proceso de mediciones directas o indirectas.

Están constituidas por cifras correctas y una cifra estimada o dudosa.

Así, por ejemplo, cuando medimos la longitud de una barra de aluminio con una regla graduada en metros, como se indica en la figura 1.1. La longitud medida con este instrumento será 2.6 m; 2.7m; 2.6m, etc.

Si observamos en estas mediciones, todas tienen una cifra en común que es el 2. Esta cifra en la que todos están de acuerdo se llama la cifra correcta.

La cifra en la que no todos están de acuerdo como es 6, 7, 6 se llama cifra dudosa o estimada.

El conjunto de las dos cifras, las correctas y la dudosa es lo que se llama cifras significativas.

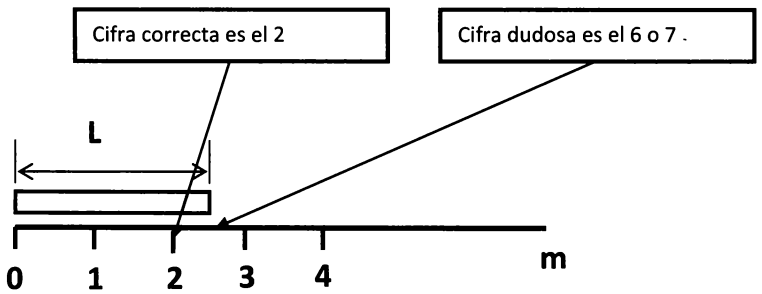


Figura 1.1

Si algún estudiante pregunta. ¿ Cual es la medición correcta 2.6m o 2.7m?. La respuesta es que las dos mediciones son correctas, porque en cada medición debe agregarse lo que llamaremos error absoluto δx.

Como la medición para un estudiante puede ser 2.6 m y para otro 2.7m, por lo tanto, hay que colocar en cada medición un intervalo de confianza llamado error o incertidumbre absoluta. Este error absoluto o incertidumbre se coloca de acuerdo como está variando la cifra dudosa y

es importante observar el orden numérico de la cifra dudosa, es decir, si la cifra dudosa está en enteros, el error absoluto debe ir en enteros, si está con un decimal, el error debe tener un decimal y así sucesivamente.

En este caso el error absoluto deber ser $\delta x = \mp 0.1\ m$ y la medición "x´´ puede ser 2.6m o 2.7 m.

La medición puede escribirse de las siguientes formas $\boldsymbol{(2.6 \pm 0.1)m}$ o $\boldsymbol{(2.7 \pm 0.1)m}$

1.14 ERROR ABSOLUTO O INCERTIDUMBRE ABSOLUTA.

El error absoluto es un valor que da un intervalo de confianza donde probablemente se encuentra el valor medido.
Así, por ejemplo:
En la medición realizada anteriormente $(x \pm \delta x) = (2.6 \pm 0.1)m$. El error absoluto ± 0.1 , da un intervalo de confianza de 2.5m hasta 2.7 m, donde probablemente se encuentre la medición, como se puede observar en la figura 1.2

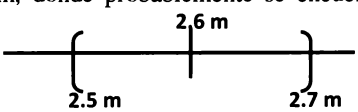


Figura 1.2

1.15 DETERMINACIÓN DEL NÚMERO DE CIFRAS SIGNIFICATIVAS.

La medición $(2.6 \pm 0.1)m$ tiene dos cifras significativas una correcta y una dudosa.
Aspectos importantes a considerar:

1) Los ceros que están a la izquierda que solo sirven para ubicar el punto decimal no se cuentan como cifras significativas.

Ejemplo 1.20.

En la siguiente medición$(0.00014 \pm 0.00001)m$. Indicar el número de cifras significativas. De acuerdo a lo expuesto anteriormente los ceros a la izquierda no son significativos, por lo tanto, la medición tendrá dos cifras significativas.

2) Las potencias de 10, no se consideran cifras significativas.

Ejemplo 1.21.

En la siguiente medición $(1.1 \times 10^3)m$. Indicar el número de cifras significativas.
Como las potencias de 10 no son cifras significativas, $\boldsymbol{10^3}$, ***no cuenta como cifras significativas***, por lo tanto, en la medición $(1.1 \times 10^3)m$, solo ***1.1 son cifras significativas***, es decir, la medición tiene ***dos cifras significativas***.

ACTIVIDAD 1.13

En las siguientes mediciones, completar el número de cifras significativas.

MEDICIÓN	NÚMERO DE CIFRAS SIGNIFICATIVAS
$(15 \pm 1)cm$	2
$(1.500 \pm 0.001)s$	
$(1.0 \pm 0.1) \times 10^3 kg$	2
$(1.115 \pm 0.001) \times 10^3 m$	
$(0.01000 \pm 0.00001)g$	4
$(0.00015 \pm 0.00001)m$	

En todo proceso de conversión de unidades, se debe mantener invariable el número de cifras significativas y puede usarse las potencias de 10.

Ejemplo 1.22

Expresar la siguiente medición 3.1 kg en g.

Para mantener el número de cifras significativas debe ayudarse con las potencias de 10, que no cuentan como cifras significativas, por lo tanto, debe escribirse de la siguiente manera.

3.1 kg, que tiene dos cifras significativas, es equivalente a $3.1x10^3$ g, que también tiene dos cifras significativas.

1.16. OPERACIONES CON CIFRAS SIGNIFICATIVAS.

Las operaciones con cifras significativas tienen las siguientes reglas.

1.16.1 SUMA Y RESTA.

Para sumar y restar mediciones con cifras significativas, el resultado debe redondearse de acuerdo al orden numérico del término menos preciso, es decir, la medición que tenga menor número de decimales.

Si se tienen las siguientes mediciones:

$a = (15 \pm 1)m$, $b = (1.50 \pm 0.01)m$ y $c = (1.0 \pm 0.1)m$

Ejemplo 1.23.

Hallar a+b=?

$a = (15 \pm 1)m$, *esta medición está en enteros*

$b = (1.50 \pm 0.01)m$, *esta medición tiene centecimas.*

$a + b = 16.50\,m$, este resultado debe redondearse al menor número de decimales, es decir, solo a enteros.

Aplicando las reglas de redondeo queda $a + b = 16\,m$

Ejemplo 1.24.

Hallar $b - c$ =?

$b - c = 1.50 - 1.0 = 0.5$, *el resultado ha sido redondeado a un decimal*

1.16.2. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN.

Para multiplicar y dividir mediciones con cifras significativas, el resultado debe redondearse de acuerdo al término que tenga el menor número de cifras significativas.

Ejemplo 1.25.

Si se tienen las siguientes mediciones:

$a = (20 \pm 1)cm$, $b = (2.00 \pm 0.01)cm$

1) Si los lados de un rectángulo están dados por las mediciones a y b. Determinar el área del rectángulo en cm^2.
   La medición $a = (20 \pm 1)cm$, tiene dos cifras significativas
   La medición $b = (2.00 \pm 0.01)cm$, tiene tres cifras significativas
   El área $a \times b = 20\ cm \times 2.00\ cm = 40.00\ cm^2$, tiene cuatro cifras significativas.
   El resultado debe redondearse al menor número de cifras significativas que es $40\ cm^2$ y tiene dos cifras significativas.

Los números que aparecen en fórmulas y que no son mediciones, se consideran números exactos, es decir tienen infinito número de cifras significativas.

Ejemplo 1.26.
Para calcular el área de un triángulo se usa $Area = \frac{base \times altura}{2}$, el número 2, no es una medición, por lo tanto, tiene infinito número de cifras significativas.

2) Una placa triangular, metálica tiene las dimensiones de base $b = (75.00 \pm 0.01)cm$ y altura $a = (4.0 \pm 0.1)cm$. Determine el área de la placa.
   La base $b = (75.00 \pm 0.01)cm$ tiene 4 cifras significativas
   La altura $a = (4.0 \pm 0.1)cm$ tiene 2 cifras significativas.

Para calcular el área de un triangulo se usa la expresión $A = \frac{b \times a}{2}$

El número 2 que aparece en la fórmula no es una medición y tiene infinito número de cifras significativas.

El área es $A = \frac{b \times a}{2} = \frac{(75.00)cm \times (4.0)cm}{2} = 150\ cm^2$, pero el resultado debe redondearse al menor número de significativas, que es 2.

Por lo tanto, el área debe escribirse en notación científica y luego redondearse a dos cifras significativas.$A = 150\ cm^2 = 1.50 \times 10^2 cm^2 = 1.5 \times 10^2 cm^2$, *dos cifras significativas*

1.17 ERROR O INCERTIDUMBRE RELATIVA.

El error relativo o incertidumbre relativa es la relación entre el error absoluto y la medición, es un parámetro adimensional, es decir, no tiene unidades. El error relativo también se puede expresar en forma porcentual y es lo que se llama error porcentual.

$I_{relativa} = \frac{\delta x}{x}$ $\quad I_{porcentual}\% = \frac{\delta x}{x} \times 100$

El error relativo o porcentual es un parámetro indicativo de la precisión de la medición.

Ejemplo 1.27.

En la siguiente medición$(1.0 \pm 0.1)m$. Determine el error relativo y porcentual.

$$I_{relativa} = \frac{\delta x}{x} = \frac{0.1}{1.0} = 0.1$$

$$I_{porcentual}\% = \frac{0.1}{1.0} \times 100 = 10\ \%$$

La medición más precisa es aquella que tenga el menor error relativo o porcentual.

Ejemplo 1.28.

De las siguientes mediciones $(1.0 \pm 0.1)m$ y $(2.6 \pm 0.1)m$
Determine la medición más precisa.

$I_{relativa} = \frac{\delta x}{x} = \frac{0.1}{1.0} = 0.1$ y $I_{relativa} = \frac{\delta x}{x} = \frac{0.1}{2.6} = 0.038$. Por lo tanto, la medición más precisa es $(2.6 \pm 0.1)m$, porque es la que tiene menor error relativo.

ACTIVIDAD 1.14

Dadas las siguientes mediciones:

$a = (15 \pm 1)cm, \quad b = (2.0 \pm 0.1)cm\ y \quad c = (4.00 \pm 0.01)cm$

Determinar las siguientes operaciones:

1. $a + b + c =$
2. $a \times b =$
3. $\frac{a \times c}{b} =$

ACTIVIDAD 1.15

Dadas las siguientes mediciones:

$a = (15 \pm 1)cm, \quad b = (2.0 \pm 0.1)cm\ y \quad c = (4.00 \pm 0.01)cm$

Determine la medición más precisa.

PROBLEMAS

1) La ecuación dimensional del torque es:
La magnitud del torque es fuerza multiplicada por la distancia

a) $[L^2][M][T^{-3}]$
b) $[L^2][M][T]$
c) $[L][M][T]$
d) $[L^2][M][T^{-2}]$

2) La ecuación dimensional de la densidad es:
La densidad se define como la relación de la masa sobre el volumen.

a) $[M][L^3]$
b) $[M][L^2]$
c) $[M][L]$
d) $[M][L^{-3}]$

3) La ecuación dimensional del periodo es :

a) $[T^2]$
b) $[T^3]$
c) $[T]$
d) $[T^4]$

4) La ecuación dimensional del caudal es:
El caudal se define como el área multiplicado la velocidad.
a) $\left[\frac{L}{T}\right]$
b) $\left[\frac{L^2}{T}\right]$
c) $\left[\frac{L^3}{T^2}\right]$
d) $\left[\frac{L^3}{T}\right]$

5) La ecuación dimensional de la potencia es:
La potencia se define como la relación del trabajo dividido para el tiempo empleado o la fuerza multiplicada por la velocidad.

a) $[L^2][M][T^{-1}]$
b) $[L][M][T^{-3}]$
c) $[L^2][M][T^{-3}]$
d) $[L^2][M^2][T^{-3}]$

6) Dada la siguiente expresión de velocidad $V = A + Bt$. Las dimensiones de A son:

a) $[L]$
b) $[LM]$
c) $[LT^{-1}]$
d) $[LT]$

7) Con relación al problema anterior. Las dimensiones de B son:
a) $[LT]$
b) $[L/M]$
c) $[LT^{-1}]$
d) $[LT^{-2}]$

8) Dada la siguiente expresión $\Delta r = At^3 + Bt + C$, para el desplazamiento de una partícula en función del tiempo t, las dimensiones de A son:

a) $[LT]$
b) $[LM]$
c) $[LT^{-1}]$
d) $[LT^{-3}]$

9) Con relación al problema anterior, las dimensiones de B son:

a) $[LT]$
b) $[LM]$
c) $[LT^{-1}]$
d) $[LT^{2}]$

10) Con relación al problema 8, la dimensión de C es:

a) $[L]$
b) $[LT]$
c) $[LM]$
d) $[MT]$

11) La metro vía se mueve a una rapidez de 40.0 km/h, la rapidez en m/s es:
a) 11.1 m/s
b) 22.2 m/s
c) 40.0 m/s
d) 20.0 m/s

12) Un anuncio sobre el puente de la Unidad Nacional muestra que la velocidad máxima es de 70.0 km/h, la velocidad en m/s es:
a) 20.4 m/s
b) 25.4 m/s
c) 40.4 m/s
d) 19.4 m/s

13) David se dirige a comprar 2.00 lb de arroz en la tienda de la esquina, pero en el local hay una balanza en kg, ¿Cuántos kg debe marcar dicha balanza?
a) 0.909 kg
b) 1.00 kg
c) 0.45 kg
d) 2.00 kg

14) Mirella desea preparar una torta de chocolate para lo cual necesita los siguientes ingredientes:

INGREDIENTES	MASA EN (lb)	MASA EN (g)
Harina	1.50	
Bicarbonato	0.11	
Polvo de hornear	0.05	
Polvo de cacao	1.00	
Sal	0.11	
Vinagre	0.11	
Total	Total en libras=	Total en gramos =

Realizar las conversiones de unidades respectivas, llenar la tabla y determinar la masa total en gramos y en libras.

EXPRESAR LAS SIGUIENTES CANTIDADES EN NOTACIÓN CIENTÍFICA.

15) El diámetro de un cabello es 0.000026 m
a) $2.6 \times 10^{-5}\, m$
b) $2.6 \times 10^{5}\, m$
c) $2.6 \times 10^{-4}\, m$
d) $2.6 \times 10^{4}\, m$

16) El radio de la Tierra es 6400000 m.
a) $6.4 \times 10^{+5}\, m$
b) $6.4 \times 10^{-5}\, m$
c) $6.4 \times 10^{+6}\, m$
d) $6.4 \times 10^{-6}\, m$

17) El diámetro de un hilo de alambre de cobre es 0.000134 m.
a) $1.34 \times 10^{-5}\, m$
b) $1.34 \times 10^{-4}\, m$
c) $1.34 \times 10^{+4}\, m$
d) $1.34 \times 10^{+5}\, m$

PREFIJOS Y SUFIJOS.

18) La carga eléctrica de un cuerpo es 0.0000015 C (Coulomb), entonces, se puede expresar de la siguiente manera:
a) 15 mC
b) 1.5 μC
c) 1.5 nC
d) 1.5 pC

19) Ordenar las siguientes cantidades físicas de menor a mayor y complete la tabla adjunta.

m, mm, dam, cm, hm, km, dm

10^{-3} m			10^{0} m			10^{+3}
mm			m			km

REDONDEO

20) Redondear las siguientes cantidades a dos decimales.

a) 2.043 m

b) 2.0678 s

21) Redondear las siguientes cantidades a dos decimales.

a) 1.023 m

b) 4.004 lb

22) Redondear las siguientes cantidades a dos decimales.

a) 1.105 g

b) 4.075 m

23) Redondear las siguientes cantidades a dos decimales.

a) 3.105001 kg

b) 2.1450001 s

c) 15.2050001 m

d) 5.005004 N

OPERACIONES CON CIFRAS SIGNIFICATIVAS, CONVERSIÓN DE UNIDADES Y REDONDEO.

24) La rapidez de un tren es de 142 $\frac{millas}{h}$, expresar la rapidez en $\frac{m}{s}$, en notación científica y con dos decimales.

a) $6.35 \times 10^{+1}$

b) 6.35×10^{-1}

c) $6.35 \times 10^{+2}$

d) 6.35×10^{-2}

25) La densidad del mercurio es de $13.6\frac{g}{cm^3}$, expresar esta densidad en $\frac{kg}{m^3}$, en notación científica y con dos decimales.

a) $1.36 \times 10^{+4}$
b) 1.36×10^{-4}
c) $1.36 \times 10^{+3}$
d) 6.35×10^{-3}

Si se tienen las siguientes mediciones:

$a = (25 \pm 1)m$, $b = (8.7 \pm 0.1)m$ y $c = (2 \pm 1)m$

26) Hallar:

$a - b =$ ☐

$b - c =$ ☐

$b \times c =$ ☐

27) En el siguiente conjunto de mediciones escribir el número de cifras significativas.

a) $0.0012m$ ☐
b) $1.2 \times 10^3 m$ ☐
c) $120\,m$ ☐
d) $0.0100003 \times 10^3 m$ ☐

28) De las siguientes mediciones, ¿cuál es la medición que está mal expresada?

a) $(2.90 \pm 0.10)cm$
b) $(2.65 \pm 0.01)m$
c) $(10 \pm 0.1)m$
d) $(1.6 \pm 0.1)kg$

29) De las siguientes medicines, ¿cuál es la medición más precisa?

a) $(2.40 \pm 0.01)cm$
b) $(1.6 \pm 0.1)m$
c) $(10.1 \pm 0.1)m$
d) $(1.6 \pm 0.1)kg$

30) Con relación al siguiente instrumento de medición, ¿cuál de las siguientes mediciones está correctamente expresada? Ver figura 1.3

a) (2.5 ± 0.10)cm
b) (25 ± 1)cm
c) (2.50 ± 0.1)cm
d) (2.5 ± 0.1)cm

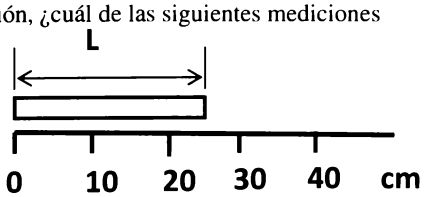


Figura 1.3

31) Escriba el número de cifras significativas correcto de acuerdo a la siguiente tabla de mediciones.

MEDICIÓN	NÚMERO DE CIFRAS SIGNIFICATIVAS
(155 ± 1)cm	
(1.00 ± 0.01)s	
$(1.035 \pm 0.001) \times 10^3$kg	
$(1.1 \pm 0.1) \times 10^3$m	
(0.00010 ± 0.00001)g	
(1.01005 ± 0.00001)m	

Se mide las dimensiones a y b, de un terreno de forma rectangular, como se indica en la figura 1.4. En los problemas 32, 33 y 34. Escoja la alternativa correcta.

32) El área del terreno es:
a) $40 \times 10^2 \text{m}^2$
b) $400\ \text{m}^2$
c) $4.0 \times 10^2 \text{m}^2$
d) $4 \times 10^2\ \text{m}^2$

$b = (10 \pm 1)m$

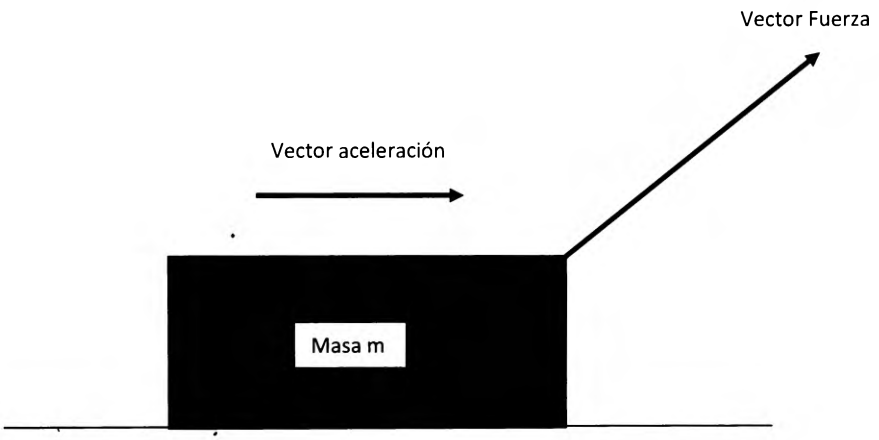
$a = (40.0 \pm 0.1)m$

Figura 1.4

33) El perímetro del terreno es:
a) 100.0 m
b) $1.0 \times 10^2\ m$
c) $10 \times 10^2\ m$
d) $100\ m$

34) Si el propietario del terreno desea vender la mitad del mismo, en forma triangular. ¿Cuál es el área del terreno a vender?
a) $2 \times 10^2 \quad m^2$
b) $2.0 \times 10^2 \quad m^2$
c) $20 \times 10^2 \quad m^2$
d) $2.00 \times 10^2\ m^2$

VECTORES



CAPÍTULO 2

INTRODUCCIÓN

La Física estudia los fenómenos que ocurren en la naturaleza y por ende debemos tener maneras de interpretarla. Si una persona se mueve de un lugar a otro ella lo puede hacer por diferentes caminos. Unos caminos pueden ser muy irregulares y otros pueden ser directamente en línea recta. Para distinguirlos llamaremos a unos distancia recorrida y a otros desplazamientos. Aun cuando parecen sinónimos, veremos que son totalmente diferentes. Es ahí que se utiliza el concepto de vectores y escalares. Hay muchos casos que ocurren en nuestra vida diaria y a menudo confundimos las cantidades llamadas vectores de las cantidades llamadas escalares.

2.1 CANTIDADES ESCALARES

Son cantidades que para su total determinación sólo se necesita especificar su magnitud con sus respectivas unidades. Por ejemplo cuando decimos que la duración del examen es de dos horas, la idea está completa. Es decir todos entenderán en qué momento el examen termina y no necesita de ninguna aclaración. Otro ejemplo sería el de la temperatura. Si una persona tiene un temperatura de 39^0C, obviamente la persona está enferma y necesita ir al médico. En estos ejemplos, el tiempo y la temperatura son cantidades escalares.

Otros ejemplos de cantidades escalares son: la densidad de un objeto, el volumen de un cuerpo, la rapidez de un auto, el potencial eléctrico etc.

2.2 CANTIDADES VECTORIALES

Son cantidades que para su total determinación se necesita, además de la magnitud, indicar su dirección. Por ejemplo, si decimos que un carro se mueve a 20 m/s, no podemos asegurar donde se hallará después de un determinado tiempo porque no especificamos su dirección. Lo correcto habría sido decir que el carro se mueve a 20 m/s en dirección Norte. En este caso podemos asegurar dónde èncontrar el carro después de cierto tiempo.

Un ejemplo sencillo sería contestar a la siguiente pregunta: ¿Puede usted mover un bloque cuya masa sea de 10 kg? Para contestar la pregunta usted necesita conocer en qué dirección tiene que aplicar la fuerza.

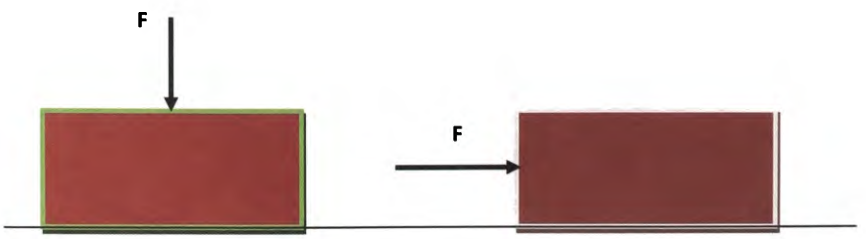


Figura 2.1*a* *Figura* 2.1*b*

En la figura *2.1 a* el bloque no se va a mover, mientras que en la figura *2.1 b* el bloque, probablemente, se moverá. Esto nos indica que la fuerza es una cantidad vectorial por lo tanto se necesita conocer la dirección de la fuerza para que un evento ocurra o no. Por supuesto esto ocurrirá dependiendo de la magnitud de la fuerza aplicada, de la masa del bloque y de la fricción ente éste y el piso.

Otros ejemplos de cantidades vectoriales son:

Aceleración: $5.0\ m/s^2$ a 60^0 al Norte del Este

Velocidad: 20.0 m/s hacia el Sur

Campo eléctrico: 516 N/C 30^0 al Oeste del Norte

Cantidad de movimiento, torque, velocidad angular, etc.

Se observa que las cantidades vectoriales tienen magnitud, dirección y unidades.

2.3 REPRESENTACIÓN GRAFICA Y NOMENCLATURA DE UN VECTOR

Un vector se representa mediante una flecha y la dirección es aquella que el vector forma con el eje positivo de las *x*.

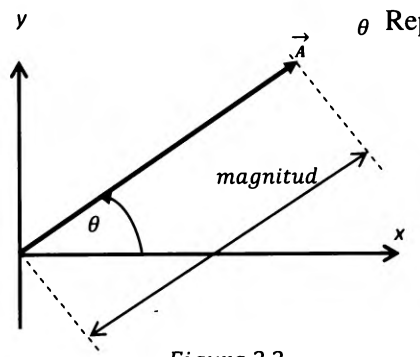


Figura 2.2

La dirección es el ángulo que el vector forma con el eje positivo de las *x* y se lo mide empezando desde el eje positivo de las *x* hacia el vector. Los siguientes ejemplos aclararán mejor el escenario.

MAGNITUD DE UN VECTOR

Cuando se dice que un vector es de *4N* y está en dirección norte, la magnitud del vector es *4N* y la dirección es Norte.

Si se tiene un vector $\vec{A}$ su magnitud se representa de las siguientes formas:

A, $|\vec{A}|$ se lee: módulo o magnitud del vector $\vec{A}$. El módulo o magnitud de un vector es siempre una cantidad positiva.

Ejemplo 2.1

a) Graficar un vector con dirección de 60^0.

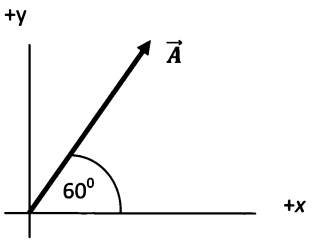


Figura 2.3

Cuando se mide el ángulo, empezando desde el eje positivo de las *x*, y se gira en **contra del las manecillas del reloj,** esa dirección se considera **positiva**.

b) Graficar un vector con dirección $+120^0$

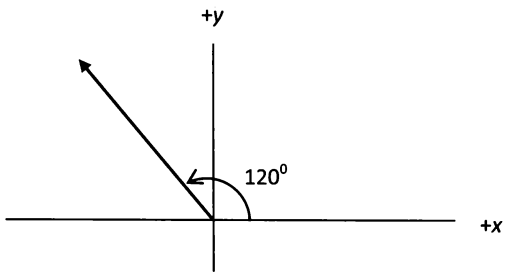


Figura 2.4

c) Graficar un vector con dirección -80^0

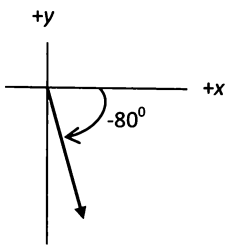


Figura 2.5

Se mide el ángulo, empezando desde el eje positivo de las *x*, y se gira a favor **de las manecillas del reloj,** esa dirección se considera **negativa**.

2.4 OPERACIONES CON VECTORES

2.4.1 Multiplicación de un escalar por un vector

Cuando se multiplica un escalar por un vector, el vector puede aumentar su magnitud, disminuir su magnitud, girar 180^0, o mantenerse constante. Todo esto depende del signo del escalar con que se multiplica el vector. Suponga que el escalar es λ .

Si λ es positivo la magnitud del vector aumenta o disminuye, pero la dirección del vector no cambia.

Si λ es negativo la dirección del vector gira 180^0.

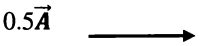
Si λ es igual a 1 la magnitud del vector no cambia.

Ejemplo 2.2

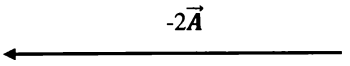
Sea el vector $\vec{A}$ cuya dirección es 0^0

a) Grafique el vector $2\vec{A}$

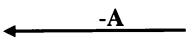
b) Grafique el vector $0.5\vec{A}$



c) Grafique el vector $-2\vec{A}$



d) Grafique el vector -A



2.4.2 Suma de vectores

Los vectores se suman, restan y multiplican. Estas operaciones son diferentes de aquellas que se realizan con escalares. Las cantidades vectoriales aplican diferentes reglas para la suma, resta y multiplicación.

Suma de Vectores

Los vectores se pueden sumar por el método gráfico del polígono, paralelogramo o por el método analítico.

a) Método gráfico del Polígono

Los vectores se colocan uno a continuación de otro de modo que la flecha de un vector coincida con el origen del siguiente, y así sucesivamente. La resultante, es el vector que empieza en el origen del primero y termina en la flecha del último.

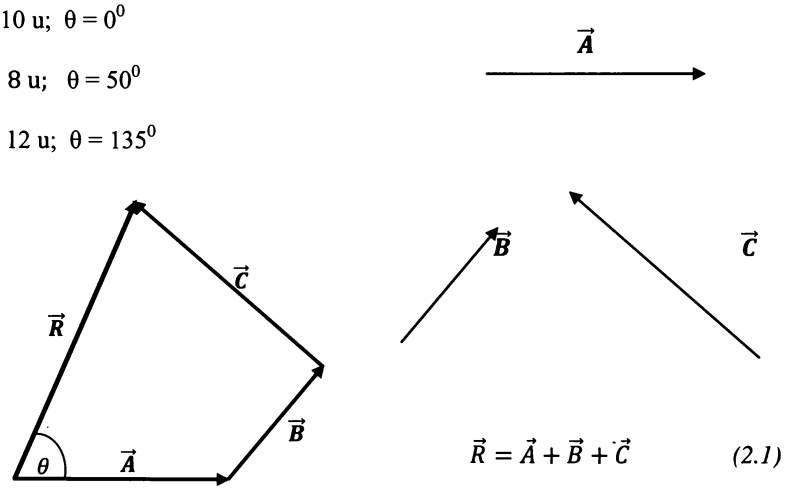
Ejemplo 2.3

Dados los siguientes vectores, calcule el valor de la resultante.

$\vec{A} = 10$ u; $\theta = 0^0$

$\vec{B} = 8$ u; $\theta = 50^0$

$\vec{C} = 12$ u; $\theta = 135^0$



$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \qquad (2.1)$$

Figura 2.6

Usando la misma escala que se utilizó para graficar los vectores, se mide la resultante y con un graduador se mide el ángulo θ entre la resultante y el eje positivo de las *x*.

Ejemplo 2.4

Dados los siguientes vectores, calcule la suma de los mismos utilizando el método gráfico del polígono.

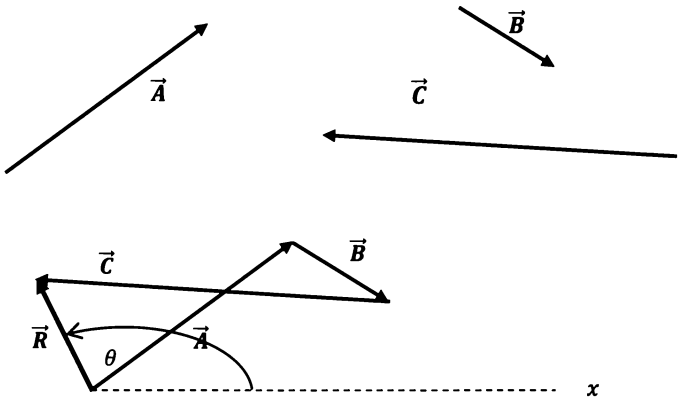


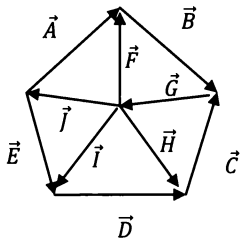
Figura 2.7

R representa la magnitud del vector suma y θ la dirección del vector. Otra vez, usando la escala con que se graficaron los vectores, se calcula el valor de la resultante. Un graduador medirá el ángulo θ correspondiente.

ACTIVIDAD 2.1

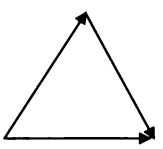
Dado el siguiente sistema de vectores del mismo tipo, determine cuál de los siguientes enunciados es el incorrecto.

a) $\vec{A}+\vec{B}+\vec{G}+\vec{J}=0$
b) $\vec{F}+\vec{G}+\vec{B}=0$
c) $\vec{A}+\vec{B}+\vec{G}+\vec{F}=0$
d) $\vec{I}=\vec{J}+\vec{E}$
e) $\vec{A}+\vec{B}+\vec{G}+\vec{I}=\vec{E}$



ACTIVIDAD 2.2

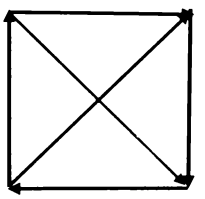
La figura muestra el siguiente sistema de **tres vectores**, donde el triangulo formado es un triangulo equilátero de lado igual a 2 unidades. Determine la magnitud de la resultante de la suma vectorial de todos los vectores del sistema.



a) 0 unidades
b) 2 unidades
c) 3 unidades
d) 4 unidades
e) 6 unidades

ACTIVIDAD 2.3

Encontrar la magnitud del vector resultante del siguiente sistema de vectores mostrados en la figura, sabiendo que el lado del cuadrado mide 2 unidades:



a) 2 unidades

b) 4 unidades
c) 6 unidades
d) $2\sqrt{2}$ unidades
e) $6\sqrt{2}$ unidades

b) Método gráfico del paralelogramo

Este es otro método gráfico que se usa para sumar vectores. Un paralelogramo es una figura geométrica formada por dos lados de igual longitud y paralelos. El siguiente es un ejemplo:

Los lados de color rojo son paralelos y de igual longitud. Similarmente, los lados de color verde son paralelos y de igual longitud.

Sean dos vectores como se muestran en la figura. Calcule el vector resultante.

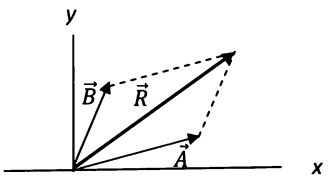


Figura 2.8

Como se puede observar en la figura, los vectores que se van a sumar son colocados de modo que sus orígenes coincidan en un punto común. En este caso, el punto común es el origen de un sistema de ejes cartesianos en el plano *xy*. Se forma un paralelogramo siendo sus lados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. La resultante es el vector que parte del origen y se dirige al vértice opuesto del paralelogramo formado. En la figura 2.8, el vector en rojo es el vector resultante. Este remplaza a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

El siguiente caso es la suma de tres vectores en el plano usando el método gráfico del paralelogramo.

Calcule: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

PRIMER PASO:

Graficar los vectores que se van a sumar. Hacer que todos ellos partan del mismo origen 0 como se muestra en la Figura 2.9.

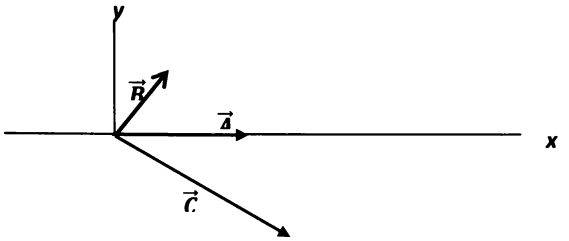


Figura 2.9

SEGUNDO PASO:

Formar un paralelogramo entre dos vectores. Estos pueden ser $\vec{A}$ y $\vec{B}$; $\vec{A}$ y $\vec{C}$; o $\vec{B}$ y $\vec{C}$. En este ejemplo se escogen los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Entonces, la figura 2.10 muestra el paralelogramo formado por estos vectores. La diagonal que parte del origen hasta el vértice opuesto es la resultante de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

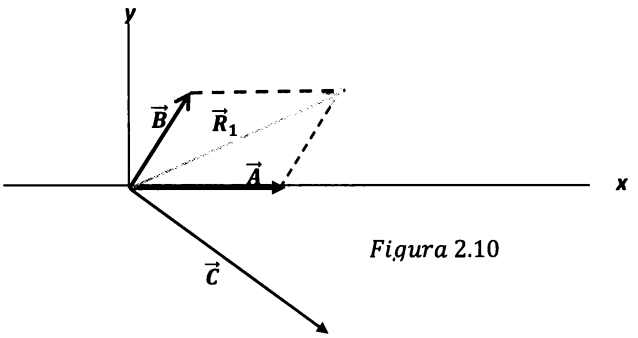


Figura 2.10

TERCER PASO

La resultante de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ $(es\ decir, \vec{R}_1)$ y el vector $\vec{C}$ forman otro paralelogramo y la resultante total es el vector que parte del origen y se dirige al vértice opuesto del paralelogramo como en la figura 2.11

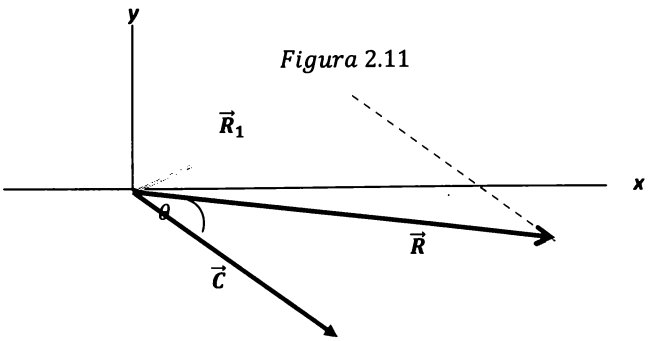


Figura 2.11

Estos tres pasos se pueden realizar en un solo diagrama, como se muestra en la figura 2.12. Por último, se mide la longitud de la resultante usando la misma escala que se usó para graficar los vectores $\vec{A}, \vec{B}$, y $\vec{C}$ y se mide con un graduador el ángulo θ con respecto al eje positivo de las x.

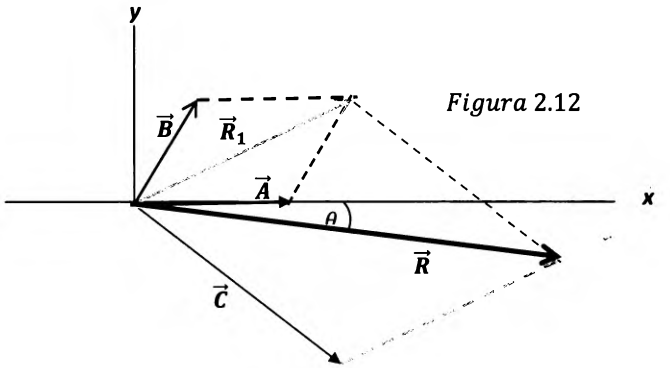


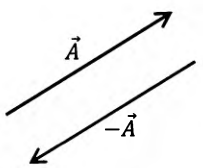
Figura 2.12

En primer lugar, se forma un paralelogramo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, la diagonal que parte del origen es el vector resultante de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Este vector llamado $\vec{R}_1$, remplaza a $\vec{A}$ y a $\vec{B}$. El siguiente paso es formar otro paralelogramo entre $\vec{R}_1$ y el tercer vector $\vec{C}$. La resultante de los tres vectores es $\vec{R}$ que es el vector que parte del origen y se dirige a lo largo de la diagonal, hacia el vértice opuesto, como se muestra en la figura 2.12.

Este procedimiento puede continuar formando más paralelogramos entre $\vec{R}$ y un cuarto vector que pudiera existir.

2.5 EL VECTOR NEGATIVO

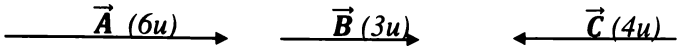
Existe un vector que es negativo y es aquel en que su dirección forma 180^0 con el vector original.



El vector en color azul es el negativo del vector en color rojo.

2.6 VECTORES COLINEALES

Son aquellos que se encuentran a lo largo de una línea recta. Pueden tener la misma dirección o dirección opuesta.



Los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son vectores colineales.

La suma de estos vectores es simplemente una suma algebraica.

Ejemplo 2.5

1. Calcule la resultante de los tres vectores dados arriba.

   $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

   $R = 6u+3u-4u \rightarrow R = +5u$ dirigida hacia la derecha.

2. Calcule la siguiente operación: $\vec{A} - 2\vec{B} - 3\vec{C}$

   $R = 6u - 2(3u) - 3(-4u)$

   $R = +12u$ dirigida hacia la derecha.

3. Calcule la siguiente operación: $-2\vec{A} + 3\vec{B} + 4\vec{C}$

   $R = -2(6u) + 3(3u) + 4(-4u)$

   $R = -19\ u$ Debido a que este resultado es negativo, se concluye que $\vec{R}$ se dirige hacia la izquierda.

2.7 COMPONENTES DE UN VECTOR

Un vector puede descomponerse en componentes rectangulares. La suma de las componentes debe ser igual al vector original. Existen componentes de un vector a lo largo de ejes que no son perpendiculares entre si, sin embargo en este texto no será tratado este tema y solamente nos concentraremos en las componentes perpendiculares de un vector.

El vector del gráfico de la figura 2.13 mostrado tiene una magnitud A y forma un ángulo θ con el eje positivo de las x.

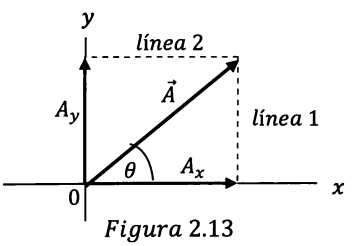


Figura 2.13

Para hallar las componentes a lo largo del los ejes x e y, se deben trazar líneas paralelas a los ejes y que pasen por la flecha del vector así como las líneas en guíones de color rojo que aparecen en la figura 2.13. La intersección de las líneas en guíones con los ejes dan las componentes A_x y A_y.

En la figura 2.13 la línea vertical (línea 1) es paralela al eje de las y y pasa por la flecha del vector $\vec{A}$. Luego, se traza una línea horizontal (línea 2) la cual es paralela al eje de las x. De este modo, la componente A_x se dirige desde el origen 0 hasta la interseccion de la *línea 1* con el eje horizontal x. De forma similar, la componente A_y se dirige desde el origen 0 hasta la intersección de la *línea 2* con el eje vertical y.

Ahora expresaremos las componentes A_x y A_y en función de la magnitud del vector $\vec{A}$ y el ángulo θ.

Recordando las principales funciones trigonométricas siguientes:

$$sen\theta = \frac{lado\ opuesto}{hipotenusa};\quad cos\theta = =\frac{lado\ adyacente}{hipotenusa};\quad tan\theta = \frac{lado\ opuesto}{lado\ adyacente}$$

Para el gráfico de la figura de 2.13:

$$cos\theta = \frac{A_x}{A} \implies A_x = Acos\theta$$

$$sen\theta = \frac{A_y}{A} \implies A_y = Asen\theta$$

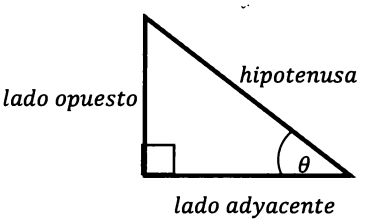


Figura 2.14

Ejemplo 2.6

Se tiene un vector $\vec{B}$ cuya magnitud es de 10.0 unidades y forma un ángulo de 60^0 con el eje positivo de las x. Calcule las componentes de $\vec{B}$ a lo largo de los ejes x e y.

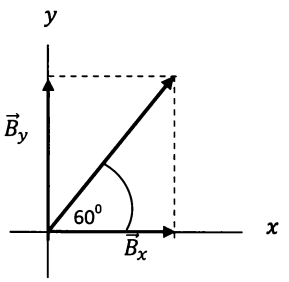


Figura 2.15

$$B_x = Bcos\theta = 10.0cos60^0 = 5.00u$$

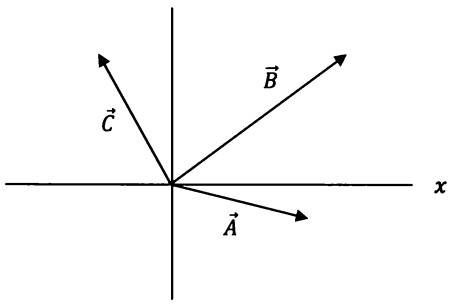
$$B_y = Bsen\theta = 10.0sen60^0 = 8.66u$$

Aplicando el teorema de Pitágoras se obtine el valor de la magnitud del vector $\vec{B}$.

$$B = \sqrt{(5.0u)^2 + (8.66u)^2} = 10.0u$$

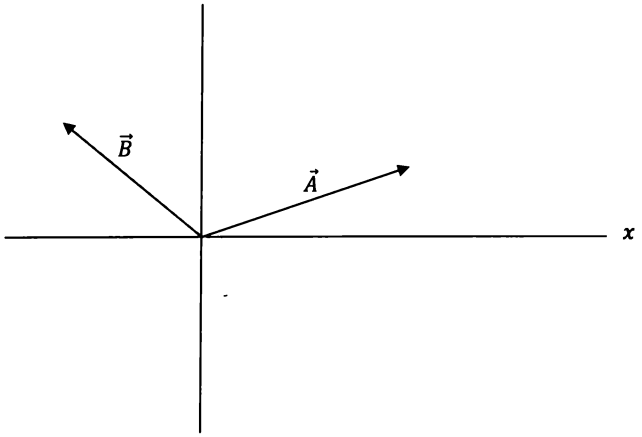
ACTIVIDAD 2.4

Dados los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ mostrados en la figura, calcule la magnitud de la resultante $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ y el ángulo que este vector forma con el eje positivo de las x. Use el método *gráfico* del polígono.



ACTIVIDAD 2.5

Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ mostrados en la figura, calcule el vector $\vec{A} - 2\vec{B}$. No olvide indicar el ángulo que el vector $\vec{A} - 2\vec{B}$ forma con el eje positivo de las x. Use el método *gráfico* del paralelogramo.



Ejemplo 2.7

Calcule las componentes del vector $\vec{C}$ el cual tiene una magnitud de 20 unidades y una dirección de 120^0.

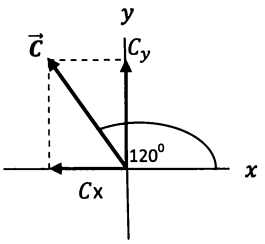


Figura 2.16

$$C_x = Ccos120^0 = 20cos120^0 = -10u$$

$$C_y = Csen120^0 = 20sen120^0 = 17.3$$

El Signo negativo en el valor de C_x indica que esa componente está en la dirección negativa del eje x.

Ejemplo 2.8

El vector $\vec{D}$ tiene una magnitud de 5 unidades y forma un ángulo de 30^0 con el eje positivo de las y. Calcule las componentes rectangulares de este vector.

En este caso el ángulo que el vector forma con el eje positivo de las **x** es de 60^0. Por lo tanto:

$$D_x = Dcos60^0 = 5cos60^0 = 2.5u$$

$$D_y = Dsen60^0 = 5sen60^0 = 4.3u$$

"Se deja que el lector realice el gráfico respectivo y que calcule la magnitud de la resultante y el ángulo que ésta forma con el eje positivo de las x". Respuesta: $R = 5u$ y $\theta = 60.0^0$.

2.8 SUMA DE VECTORES POR EL METODO DE LAS COMPONENTES RECTANGULARES

Este método consiste en sumar dos o más vectores usando métodos analíticos. Es decir, descomponemos todos los vectores dados en sus componentes rectangulares de modo que los vectores descompuestos puedan ser sumados como vectores colineales en el eje x y en el eje y.

El método consiste en colocar los vectores desde el origen sin necesidad de hacerlos a escala y luego proceder a descomponer cada uno de ellos.

Ejemplo 2.9

Sean los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ graficados como se muestra en la figura. Hallar la resultante $\vec{A}+\vec{B}$. El vector $\vec{B}$ forma un ángulo de 30^0 con el eje $+x$, y el vector $\vec{A}$ un ángulo de 60^0 con el eje $+x$.

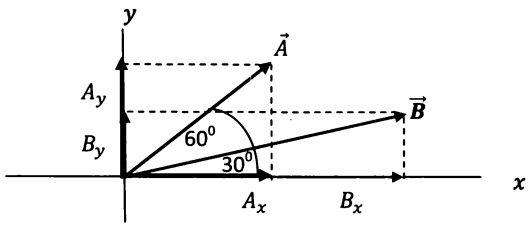


Figura 2.17

Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ han sido remplazados por sus respectivas componentes y se debe observar que A_x y B_x se pueden sumar como simples escalares; además son positivos porque están dirigidos hacia la derecha. Se debe notar también que las componentes A_y y B_y se suman como simples escalares y son positivos porque ambas se encuentran dirigidas hacia arriba a lo largo del eje de las y.

Llamaremos R_x a la suma de las componentes en el eje x y R_y a la suma de las componentes a lo largo del eje de las y.

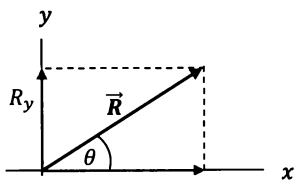


Figura 2.18

$$R_x = A_x + B_x \qquad (2.2)$$

$$R_y = A_y + B_y \qquad (2.3)$$

$$R_x = A\cos 60^0 + B\cos 30^0$$

$$R_y = Asen60^0 + Bsen30^0$$

La magnitud de la resultante $\vec{R}$ se puede calcular usando el teorema de Pitágoras.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

En la figura 2.18, la tangente del ángulo θ relaciona la resultante en el eje y, R_y, y la resultante en el eje x, R_x. Por lo tanto, la tangente del ángulo θ puede escribirse de la siguiente manera:

$$tan\theta = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \theta = tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}$$

En el caso de tener más de dos vectores el procedimiento es similar. Se debe recordar que la descomposición de vectores es "descomponer cada vector" en cada uno en los ejes x e y.

Ejemplo 2.10

Calcule la resultante de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$

Observe que se han graficado los ángulos que los vectores forman con el eje x más próximo.

A: 10 u $\theta = 30^0$

B: 15u $\theta = 130^0$

C: 5u $\theta = 250^0$

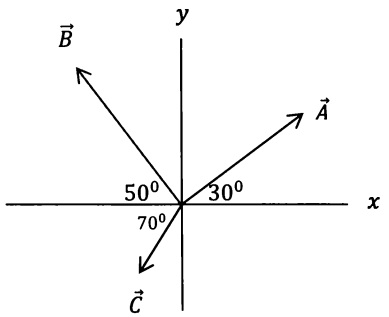


Figura 2.19 (*a*)

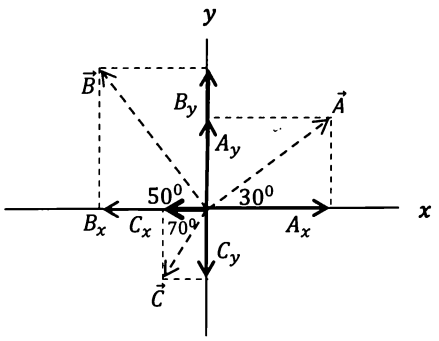


Figura 2.19 (*b*)

En la figura 2.19 (a) se muestran los tres vectores que se van a sumar. En el gráfico 2.19 (b) los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, y $\vec{C}$ están con línea punteada ya que ellos han sido remplazados por sus componentes a lo largo de los ejes x y y.

$$R_x = Acos30^0 - Bcos50^0 - Ccos70^0 = 10cos30^0 - 15cos50^0 - 5cos70^0 \Rightarrow R_x = -2.7u$$

$$R_y = Asen30^0 + Bsen50^0 - Csen70^0 = 10sen30^0 + 15sen50^0 - 5sen70^0 \Rightarrow R_y = 11.8u$$

$$tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{11.8}{2.7} = 4.37 \Rightarrow \theta = tan^{-1}(4.37) \Rightarrow \theta = 77.1^0$$

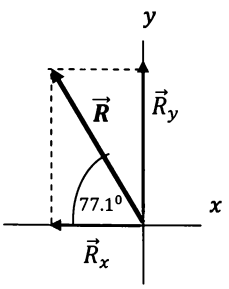


Figura 2.20

Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{2.7^2 + 11.8^2} = 12.1u$$

OBSERVACIONES:

1. Al hallar $tan\theta$ no se consideró el signo de R_x , sino que se procedió a graficar el vector $\vec{R}_x$ hacia la izquierda debido a su valor negativo.

2. El ángulo hallado θ es aquel que forma el vector $\vec{R}$ con el eje x más cercano. En este caso es de 77.1^0. Sin embargo también es correcto afirmar que el ángulo que forma el vector $\vec{R}$ es $180^0 - 77.1^0 = +102.9^0$. Este ángulo es el que forma $\vec{R}$ con el eje positivo de las x.

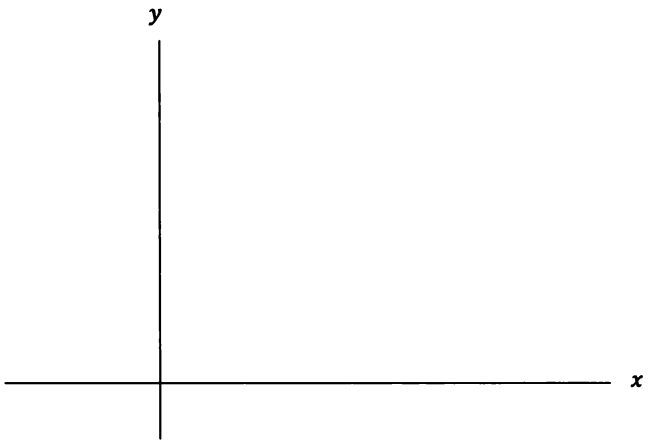
ACTIVIDAD 2.6

Dados los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, y $\vec{C}$ que se indican a continuación, calcule la magnitud y la dirección del vector resultante $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ usando el método de las componentes rectangulares.

$\vec{A}$: $10u$, -20^0

B: $20u$, 30^0

$\vec{C}$: $15u$, 120^0



ACTIVIDAD 2.7

Dados los vectores mostrados en la figura, calcule las siguientes operaciones: (sólo calcule las magnitudes)

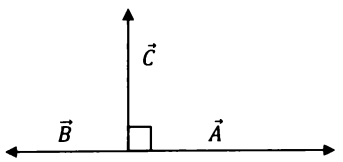
$$A = 6\ unidades$$

$$B = 3\ unidades$$

$$C = 4\ unidades$$

OPERACIONES:

1. $|\vec{A} + \vec{B}|$
2. $|\vec{A} - \vec{B}|$
3. $|\vec{B} + \vec{C}|$
4. $|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}|$



LEY CONMUTATIVA DE LA ADICION

Si se tienen dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se cumple que:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

LEY ASOCIATIVA: $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

LEY DISTRIBUTIVA: $c(\vec{A} + \vec{B}) = c\vec{A} + c\vec{B}$

2.9 LEY DEL COSENO

Cuando se tienen que sumar dos vectores es conveniente usar la ley del coseno en lugar del método de las componentes. Se va a deducir la resultante de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que forman una ángulo θ entre ellos.

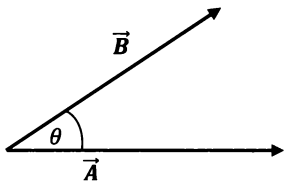


Figura 2.21

Se halla la resultante usando el método del paralelogramo y se descompone el vector $\vec{B}$ en su componente horizontal $Bcos\theta$. Luego se aplica el teorema de Pitágoras como se ve a continuación en la figura 2.22.

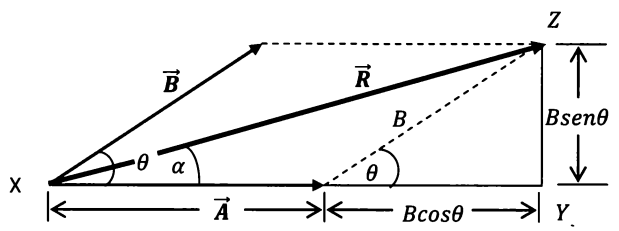


Figura. 2.22

Para el triángulo rectángulo XYZ, R es la hipotenusa, $Bsen\theta$ es un cateto y $(A + Bcos\theta)$ es el otro cateto. Se puede aplicar el teorema de Pitágoras para hallar R.

$$R = \sqrt{(A + Bcos\theta)^2 + (Bsen\theta)^2}$$

Resolviendo.

$$R = \sqrt{A^2 + B^2cos^2\theta + 2ABcos\theta + B^2sen^2\theta}$$

Agrupando

$$R = \sqrt{A^2 + B^2(cos^2\theta + sen^2\theta) + 2ABcos\theta}$$

Por trigonometría se conoce que $cos^2\theta + sen^2\theta = 1$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcos\theta} \qquad (2.4)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

El ángulo que la resultante forma con la horizontal es α el cual se calcula con la tangente de α.

$$tan\alpha = \frac{Bsen\theta}{A + Bcos\theta} \qquad (2.5)$$

Ejemplo 2.11

Sobre una caja que está en el suelo, se aplican dos fuerzas como se muestra en la figura. Tanto $\vec{F}$ como $\vec{Q}$ se hallan sobre el mismo plano. Calcule la fuerza resultante y su dirección.

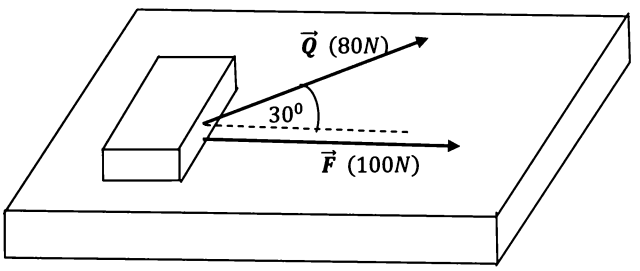


Figura 2.23

$$F_R = \sqrt{F^2 + Q^2 + 2FQcos\theta} \qquad F_R = \sqrt{100^2 + 80^2 + 2(80)(100)cos30^0}$$

$$\vec{F}_R = \mathbf{173.9\ N}$$

El ángulo que la fuerza resultante forma con el eje x es:

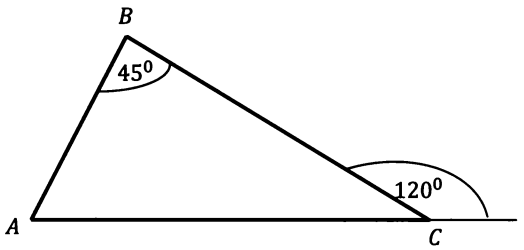
$$tan\alpha = \frac{Qsen\theta}{F + Qcos\theta} \qquad \text{Donde } \theta \text{ es igual a } 30^0$$

$$tan\alpha = \frac{80sen30^0}{100 + 80cos30^0} = 0.236$$

$$\alpha = \tan^{-1} 0.236 \qquad \boldsymbol{\alpha = 13.3^0}$$

ACTIVIDAD 2.8

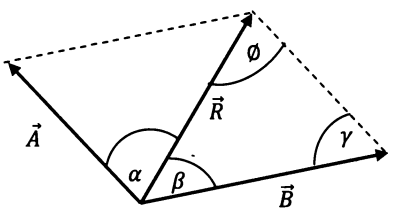
Para el triángulo ABC mostrado en la figura, calcule el valor del lado AB usando la ley del coseno. El lado AC mide 9 cm; el lado BC mide 6cm. Datos: $cos60^0 = 0.5$; $cos45^0 = 0.71$; $cos75^0 = 0.26$



ACTIVIDAD 2.9

Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como se muestran en la figura, donde $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$. indique cual de las siguientes alternativas es la correcta.

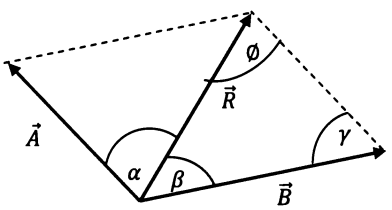
a) $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcos\beta}$
b) $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcos\alpha}$
c) $R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2ABcos(\alpha + \beta)}$
d) $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcos(\alpha + \beta)}$
e) $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcos(180 - \beta)}$



ACTIVIDAD 2.10

Con respecto al siguiente gráfico, ¿Es verdad que la resultante de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es $R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2ABcos\gamma}$

SI NO



Ejemplo 2.12

Calcule la suma de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ mostrados en la figura.

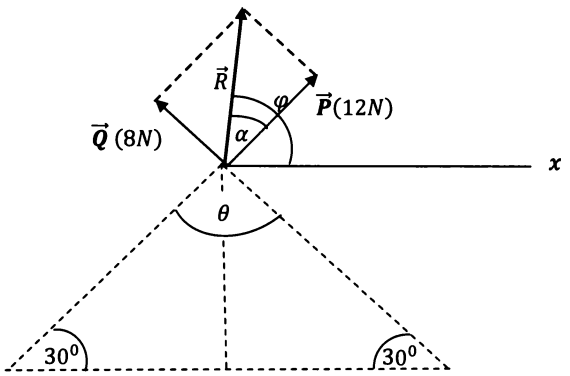


Figura 2.24

La suma de los ángulos internos de un triángulo debe sumar 180^0, por lo tanto $\theta = 120^0$

Así, el ángulo entre los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ es también 120^o, entonces, podemos aplicar la ley del coseno para hallar la resultante.

$$R = \sqrt{12^2 + 8^2 + 2(12)(8)cos120^0}$$

$$R = 10.6\ N$$

Para hallar el ángulo que $\vec{R}$ forma con el vector $\vec{P}$, aplicamos la fórmula:

$$tan\alpha = \frac{Qsen\theta}{P + Qcos\theta}$$

$$tan\alpha = \frac{8sen120^0}{12 + 8cos120^0}$$

$$\alpha = 40.9^0$$

Para hallar el ángulo que el vector $\vec{R}$ forma con el eje positivo de las x, debemos añadirle el ángulo que $\vec{P}$ forma con el eje positivo de las x que es de 30^0.

$$\varphi = 40.9^0 + 30^0$$

Por lo tanto: $\varphi = 70.9^0$

Donde $\varphi = 70.9^0$ es el ángulo que el vector $\vec{R}$ forma con el eje positivo de las x, como puede observarse en la figura 2.24.

2.10 LEY DEL SENO

Utilizando la misma figura que aquella para deducir la ley del Coseno (figura 2.24), podemos deducir la ley del seno.

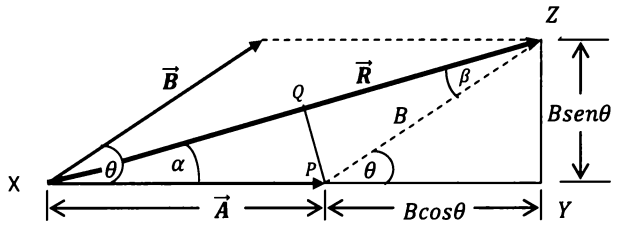


Figura 2.25

Del triángulo XZY se observa que: $Bsen\theta = Rsen\alpha$; $\frac{R}{sen\theta} = \frac{B}{sen\alpha}$

Del triángulo *XPQ:* $\overline{PQ} = Asen\alpha$

Del triángulo *ZPQ:* $\overline{PQ} = Bsen\beta$

Igualando: $Bsen\beta = Asen\alpha$

$$\frac{B}{sen\alpha} = \frac{A}{sen\beta} \qquad (2.6)$$

Finalmente:

$$\frac{B}{sen\alpha} = \frac{A}{sen\beta} = \frac{R}{sen\theta} \qquad (2.7)$$

A la ecuación (2.7) se la denomina *LEY DEL SENO.* Esta expresión nos permite calcular los lados o los ángulos del triángulo *XPZ* de la figura (2.25).

Ejemplo 2.13

En este ejemplo que fue resuelto en el ejemplo *2.9* de la figura 2.24, se calculará el ángulo α usando la ley del seno.

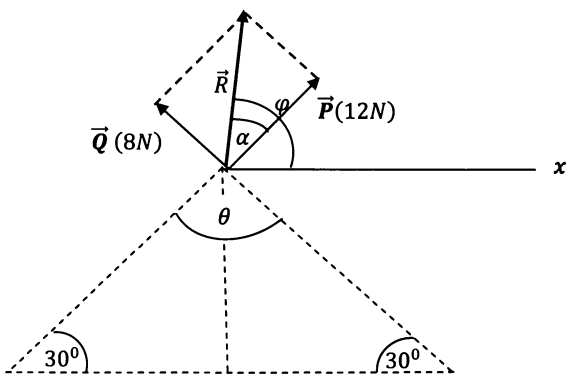


Figura. 2.26

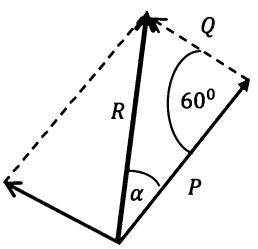


Figura. 2.27

La suma de los cuatro ángulos internos del cuadrilátero es igual a 360^0.

En este ejemplo que fue resuelto en el ejemplo *2.12* de la figura 2.24, se calculará el ángulo α usando la ley del seno.

Al aplicar la ley del seno:

$$\frac{Q}{sen\alpha} = \frac{R}{sen60^0}$$

$$sen\alpha = \frac{Q}{R} sen60^0$$

$$sen\alpha = \frac{8}{10.6} sen60^0$$

$$sen\alpha = 0.654$$

$$\alpha = sen^{-1}(0.654)$$

$\alpha = 40.8^0$ lo cual coincide con la respuesta del ejemplo

2.11 RESTA DE VECTORES

La resta de vectores puede convertirse en una suma de vectores que ya se ha tratado anteriormente. Si se desea realizar la operación $\vec{A} - \vec{B}$, esto puede escribirse como $\vec{A} + (-\vec{B})$. Esto implica que la resta no es más que una suma de $\vec{A}$ con el vector $-\vec{B}$.

Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ calcule el vector $\vec{A} - \vec{B}$

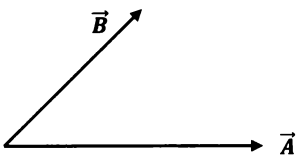


Figura 2.28

Primero, se dibuja el vector $\vec{A}$, igual que en el gráfico de la figura 2.28 y se procede a dibujar el vector $-\vec{B}$ como se observa a continuación en la figura 2.29:

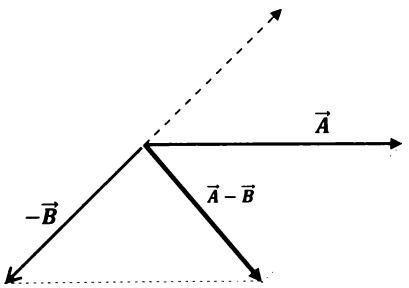
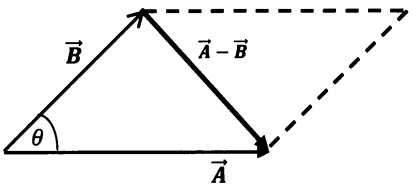


Figura 2.29

El vector $\vec{A} - \vec{B}$ es la resultante de los vectores $\vec{A}$ y $-\vec{B}$ y puede ser calculado por cualquiera de los métodos usados para sumar vectores.

Es importante notar que con una variante en la ley del coseno se puede calcular la resta de dos vectores, como sigue:



$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

Resta de vectores

Figura 2.30

Este resultado no debe confundirse con aquel para calcular la resultante de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Esto es,

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

Suma de vectores

2.12 VECTORES UNITARIOS

Vectores Unitarios son aquellos que tienen magnitud igual a la unidad y pueden tener cualquier dirección.

Un vector unitario que tenga la misma dirección que un vector cualquiera $\vec{A}$ se define como el vector dividido para su magnitud. Un vector unitario se representa por una letra o un símbolo de la siguiente manera: $\hat{e}$ lo cual significa vector unitario e.

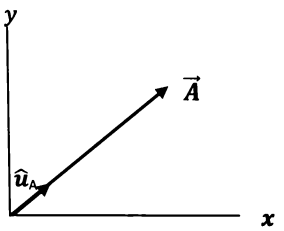


Figura 2.31

$$\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

$\hat{u}_A$ se lee: "vector unitario en la dirección del vector $\vec{A}$.

Se va a definir al vector unitario $\hat{\imath}$ como aquel que está dirigido a lo largo del eje x. De forma similar se define al vector unitario $\hat{\jmath}$ aquel que está dirigido a lo largo del eje y como se muestra en la figura 2.32.

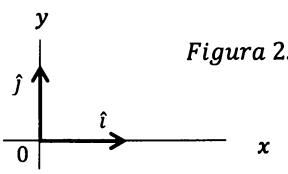


Figura 2.32

Ejemplo 2.14

Exprese un vector cualquiera en términos de sus vectores unitarios.

Solución:

En forma arbitraria vamos a escoger un vector $\vec{A}$

$$\vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$$

Este vector nos indica que la componente en la dirección x es igual a 3. Cuando se escribe $3\hat{\imath}$ se quiere decir que el vector está en la dirección x y que su magnitud es 3. De igual manera, el vector $\vec{A}$ también tiene otra componente en la dirección y y su magnitud es 4. Por lo tanto ese vector se escribe $4\hat{\jmath}$.

Un vector se puede escribir en función de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ y también dando su magnitud y su dirección.

Para el ejemplo *2.14* calcule la magnitud y la dirección del vector $\vec{A}$.

$$\vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$$

La magnitud se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.

$$A = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5u.$$

A fin de visualizar mejor, en la figura *2.33* se ha graficado el vector $\vec{A}$.

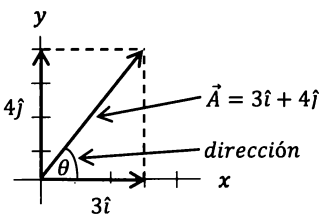


Figura 2.33

La dirección del vector $\vec{A}$ puede hallarse usando la tangente.

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \qquad (2.8)$$

donde A_y es la magnitud del vector en la dirección y, y A_x la magnitud del vector en la dirección x.

Para nuestro ejemplo: $tan\theta = \frac{4}{3}$ $\qquad \theta = 53^0$

Una forma general de escribir un vector es:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \qquad (2.9)$$

Ejemplo 2.15

Dados 2 vectores: $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + \vec{A}_y\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath}$ calcule $\vec{A} + \vec{B}$

Solución

Es muy fácil sumar vectores cuando éstos están expresados en función de los vectores unitarios. El procedimiento es sumar los coeficientes del vector unitario $\hat{\imath}$ y luego sumar los coeficientes del vector unitario $\hat{\jmath}$. Para el caso de nuestro ejemplo se tiene:

$$\vec{A}+\vec{B}=\left(A_x+B_x\right)\hat{\imath}+\left(A_y+B_y\right)\hat{\jmath} \qquad (2.10)$$

Ejemplo 2.16

Dados los vectores: $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 6\hat{\imath} - 8\hat{\jmath}$ calcule $\vec{A} + \vec{B}$

$$\vec{A} + \vec{B} = (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}) + (6\hat{\imath} - 8\hat{\jmath})$$

Sumando los $\hat{\imath}$ y los $\hat{\jmath}$: $\vec{A} + \vec{B} = (3 + 6)\hat{\imath} + (4 - 8)\hat{\jmath}$

$$\vec{A} + \vec{B} = 9\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$$

Ejemplo 2.17

Para los vectores dados en el ejemplo 2.16: $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 6\hat{\imath} - 8\hat{\jmath}$ calcule el vector: $2\vec{A} + 3\vec{B}$

Primero calculamos el vector $2\vec{A}$ y el vector $3\vec{B}$, lo cual queda:

$$2\vec{A} = 2(3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}) \quad \text{y} \quad 3\vec{B} = 3(6\hat{\imath} - 8\hat{\jmath})$$

y multiplicando los escalares *2* y *3* por cada uno de los vectores:

$$2\vec{A} = (6\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}) \quad \text{y} \quad 3\vec{A} = (18\hat{\imath} - 24\hat{\jmath})$$

sumando los dos vectores queda:

$$2\vec{A} + 3\vec{B} = (6\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}) + (18\hat{\imath} - 24\hat{\jmath})$$

el resultado final es: $2\vec{A} + 3\vec{B} = 24\hat{\imath} - 16\hat{\jmath}$

Ejemplo 2.18

Para el vector: $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$; calcule la magnitud de $\vec{A}$ y la dirección θ.

Solución:

Cuando un vector está expresado en función de vectores unitarios, para calcular la magnitud del vector se aplica el teorema de Pitágoras. Esto es correcto ya que los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ forman 90^0 entre si.

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

La dirección está dada por: $tan\theta = \frac{A_y}{A_x} = \frac{4}{3}$ $\theta = tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53^0$

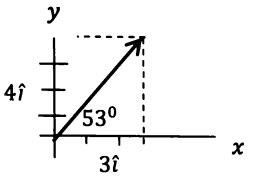


Figura 2.34

2.13 PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

En la Física se conocen dos tipos de multiplicación de vectores. Uno es el producto escalar, conocido también como producto punto de vectores cuyo resultado es un escalar. El otro tipo es el producto vectorial, conocido también como producto cruz, de vectores y su resultado es un vector. Por el momento se estudiará el producto punto de vectores.

Suponga que se tiene dos vectores $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 6\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$. El producto punto se define como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \qquad (2.11)$$

donde $|\vec{A}|$ es el módulo del vector $\vec{A}$ (también se puede representar por: $\underline{A}$); $|\vec{B}|$ el módulo del vector $\vec{B}$ (también se puede representar por: $\underline{B}$) y θ el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Estos vectores están representados en la figura 2.35.

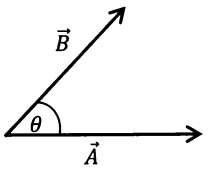


Figura 2.35

PRODUCTO PUNTO DE VECTORES UNITARIOS

Los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ tiene magnitud *1* y forman entre sí 90^0. Por convención, el vector unitario $\hat{\imath}$ está a lo largo ele eje x, y el vector unitario $\hat{\jmath}$ a lo largo del eje y.

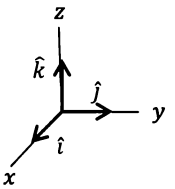
$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = 1 \times 1 \times \cos 0^0 = 1 \qquad (2.12)$$

$$\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = 1 \times 1 \times \cos 0^0 = 1 \qquad (2.13)$$

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \times 1 \times \cos 0^0 = 1 \qquad (2.14)$$

Debido a que los vectores $\hat{\imath}$ son paralelos entre sí, el ángulo entre dos vectores iguales es igual a cero. Además, el coseno de 0 es igual a 1.

Ahora se va a calcular el producto punto de dos vectores unitarios que forman 90^0 entre si. Debe recordarse que los vectores unitarios tienen magnitud *1* y que el de $cos90^0 = 0$.



$$\hat{i}\cdot\hat{j}=1\times1\times\cos90^0=0 \qquad (2.15)$$

$$\hat{j}\cdot\hat{i}=1\times1\times\cos90^0=0 \qquad (2.16)$$

$$\hat{j}\cdot\hat{k}=1\times1\times\cos90^0=0 \qquad (2.17)$$

$$\hat{k}\cdot\hat{j}=1\times1\times\cos90^0=0 \qquad (2.18)$$

$$\hat{i}\cdot\hat{k}=1\times1\times\cos90^0=0 \qquad (2.19)$$

$$\hat{k}\cdot\hat{i}=1\times1\times\cos90^0=0 \qquad (2.20)$$

De las 6 últimas ecuaciones se observa que el producto punto es conmutativo, y en general se puede decir que:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A} \qquad (2.21)$$

Dados los vectores: $\vec{A}=A_x\hat{\imath}+\vec{A}_y\hat{\jmath}$ y $\vec{B}=B_x\hat{\imath}+B_y\hat{\jmath}$ calcular el producto $\vec{A}\cdot\vec{B}$.

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left(A_x\hat{\imath}+\vec{A}_y\hat{\jmath}\right)\cdot\left(B_x\hat{\imath}+B_y\hat{\jmath}\right)$$

Se procede a multiplicar término a término.

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x\left(\hat{i}\cdot\hat{i}\right)+A_xB_y\left(\hat{i}\cdot\hat{j}\right)+A_yB_x\left(\hat{j}\cdot\hat{i}\right)+A_yB_y\left(\hat{j}\cdot\hat{j}\right)$$

Recordando que: $\hat{i}\cdot\hat{i}=1$; $\hat{j}\cdot\hat{j}=1$ y que $\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}=\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath}=0$, la ecuación anterior queda:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y \qquad (2.22)$$

Así, el producto escalar o producto punto de dos vectores es igual a un escalar.

Ejemplo 2.19

Dados los vectores $\vec{A}=3\hat{\imath}+4\hat{\jmath}$ y $\vec{B}=6\hat{\imath}+8\hat{\jmath}$ calcule el producto punto entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Solución:

Aplicando la ecuación 2.22, $\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y$ el producto punto entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(3\times6)+(4\times8) \qquad \vec{A}\cdot\vec{B}=50$$

Ejemplo 2.20

Calcule el módulo de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dados en el ejemplo 2.16.

Los vectores dados en el ejemplo 2.16 son: $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 6\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$

El módulo del vector $\vec{A}$ es: $A = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ y,

El módulo del vector $\vec{B}$ es: $B = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

Ejemplo 2.21

Calcule el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dados en el ejemplo 2.20.

$\vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$; $\vec{B} = 6\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$

Solución

En el ejemplo 2.19 se encontró que el producto punto entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es igual a *50.* También se encontró en el ejemplo 2.20 que el módulo de vector $\vec{A}$ es 5, y que el módulo del vector $\vec{B}$ es 10.

Sabiendo que por definición: $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$, se debe despejar $cos\theta$, quedando:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

y, remplazando los valores ya calculados:

$$\cos\theta = \frac{50}{5 \times 10} = 1$$

Por lo tanto el ángulo θ entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es de 0^0, ya que $cos0^0 = 1$. De esta manera podemos concluir que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores paralelos. También se puede observar que el vector $\vec{B}$ es igual a $2\vec{A}$.

Ejemplo 2.22

El vector $\vec{A}$ tiene una magnitud de 4 unidades y forma un ángulos de 0^0 con el eje positivo de la x. El vector $\vec{B}$ tiene una magnitud de 6 unidades y forma un ángulo de 60^0 con el eje positivo de las x. Calcule el producto punto $\vec{A} \cdot \vec{B}$. $(cos60^0 = 0.5)$

Solución

Se puede llegar a la respuesta aplicando la definición del producto punto dada en la ecuación 2.11.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 4 \times 6 \times \cos 60^0$ $\qquad$ $\vec{A} \cdot \vec{B} = 12\,unidades$

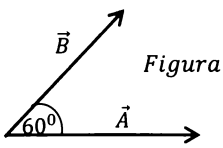


Figura 2.36

Ejemplo 2.23

El ángulo que el vector $\vec{C}$ forma con el eje positivo de las x es de 15^0 y su magnitud es de 8 unidades. El vector $\vec{D}$ forma un ángulo de 75^0 con el eje positivo de las x y su magnitud es de 10 unidades. Calcule el producto punto $\vec{C} \cdot \vec{D}$. $(cos60^0) = 0.5$

Solución:

En la figura 2.37 están graficados los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$ con sus respectivos ángulos con respecto al eje positivo de las x. Se puede observar en la figura que el ángulo entre los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$ es de 60^0.

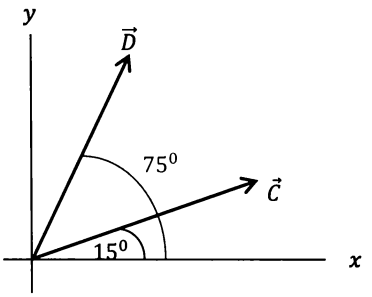


Figura 2.37

Aplicando la ecuación 2.11; $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$ y remplazando $\vec{A}$ por $\vec{C}$ y $\vec{B}$ por $\vec{D}$:

$$\vec{C} \cdot \vec{D} = CD\cos 60^0 \qquad \vec{C} \cdot \vec{D} = 8 \times 10 \times 0.5 = 40 \text{ unidades}$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DEL PRODUCTO ESCALAR.

A partir de la definición del producto escalar o producto punto, se puede entender el significado geométrico de este producto de vectores.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$$

esta ecuación puede escribirse como:

$$B\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A}$$

En la figura 2.38 se observa el significado de $B cos\theta$.

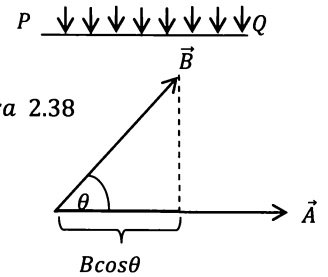


Figura 2.38

El recuadro amarillo de la figura 2.38 representa la luz que apunta hacia abajo sobre el vector $\vec{B}$, de modo que la sombra que se proyecta es la línea en rojo.

Si desde la parte superior (la región PQ) se envía luz hacia el vector $\vec{B}$, se proyectará sobre el vector $\vec{A}$ una sombra que en la figura se representa por medio del segmento señalado por $B\cos\theta$. Ahora, desde que:

$$B\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A}$$

se concluye que la proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$ está dado por: $\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A}$. De esta última expresión se observa que $\frac{\vec{A}}{A}$ es el vector unitario en la dirección de $\vec{A}$. Por lo tanto se puede concluir que la proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}$ es igual al producto punto entre el vector $\vec{B}$ y el vector unitario en la dirección del vector $\vec{A}$.

$\vec{B}\cdot\hat{u}_A =$ proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}$. (2.23)

Por otro lado, la proyección del vector $\vec{A}$ sobre la dirección del vector $\vec{B}$ estará dada por:

$\vec{A}\cdot\hat{u}_B =$ proyección del vector $\vec{A}$ sobre la dirección del vector $\vec{B}$. (2.24)

Ejemplo 2.24

Se tiene dos vectores: $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 2\hat{\jmath}$. Calcule la proyección del vector $\vec{A}$ sobre la dirección del vector $\vec{B}$.

Solución:

La proyección del vector $\vec{A}$ sobre la dirección del vector $\vec{B}$ está dada por: $\vec{A}\cdot\hat{u}_B$. Por lo tanto se debe hallar el vector $\hat{u}_B$.

$$\hat{u}_B = \frac{\vec{B}}{B}$$

Se conoce el vector $\vec{B}$ y por tanto su módulo es simplemente igual a 2.

$$\hat{u}_B = \frac{2\hat{j}}{2} = \hat{j}$$

La proyección del vector $\vec{A}$ sobre la dirección del vector $\vec{B}$ está dada por:

$$\vec{A}\cdot\hat{u}_B = (3\mathrm{i} + 4\mathrm{j})\cdot\hat{j} = 4 \text{ unidades}$$

Ejemplo 2.25

Calcule la proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}$.

Solución:

En este caso se debe hallar primero el vector unitario en la dirección del vector $\vec{A}$.

$$\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{3\hat{i} + 4\hat{j}}{5}$$ el módulo del vector $\vec{A}$ es 5.

$$\hat{u}_A = \frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}$$

la proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}$ está dada por:

$$\vec{B} \cdot \hat{u}_A = 2\hat{j} \cdot \left(\frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}\right) = \frac{8}{5} \text{ unidades}$$

Se debe hacer énfasis en el sentido de que la proyección de un vector $\vec{X}$ sobre la dirección del vector $\vec{Y}$, **no** es igual al producto punto de $\vec{X}$ y $\vec{Y}$ sino que es igual al producto punto entre el vector $\vec{X}$ y el vector *unitario* que tenga la dirección del vector $\vec{Y}$. Así, lo primero que se debe hacer es hallar ese vector unitario en la dirección del vector sobre el cual se quiere proyectar. El vector unitario en la dirección de un vector $\vec{Z}$ es igual al cociente entre $\vec{Z}$ y su magnitud. Es decir:

$$\hat{u}_Z = \frac{\vec{Z}}{Z} \text{ donde } \hat{u}_Z \text{ es el vector unitario en la dirección del vector .}$$

2.14 VECTORES UNITARIOS ORTOGONALES EN TRES DIMENSIONES

En este tema se va a revisar un sistema de ejes perpendiculares en el espacio. Para el plano denominamos los ejes con x e y. Se añadirá un tercer eje z para ubicar vectores en el espacio.

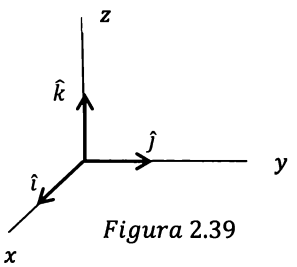


Figura 2.39

Los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ son los vectores unitarios a lo largo de los ejes x, y, z *respectivamente.*

Un vector puede ser representado por medio de sus vectores unitarios. Por ejemplo, si se escribe: $A_x\hat{i}$ representa la componente del vector $\vec{A}$ en la dirección x.

$A_y\hat{j}$ representa la componente del vector $\vec{A}$ en la dirección y.

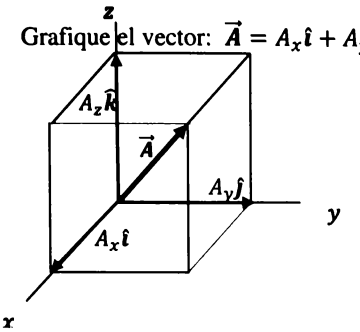
$A_z\hat{k}$ representa la componente del vector $\vec{A}$ en la dirección z.

Por lo tanto, cualquier vector puede ser representado en términos de sus componentes rectangulares:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \qquad (2.25)$$

Ejemplo 2.26

Grafique el vector: $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$



La magnitud del vector $\vec{A}$ es: $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ ó

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Figura 2.40

Ejemplo 2.27

Dada la figura mostrada, escriba los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$

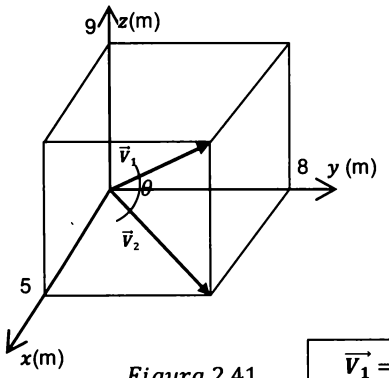


Figura 2.41

$$\vec{V_1} = 5\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} + 9\hat{k}$$

$$\vec{V_2} = 5\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

Ejemplo 2.28

Para el problema anterior, calcule $\vec{V_1} + \vec{V_2}$

La suma en función de vectores unitarios es muy sencilla: se suman las componentes en *x*, luego las componentes en *y*, y finalmente las componentes en *z*.

$\vec{V_1} + \vec{V_2} = 10\hat{\imath} + 16\hat{\jmath} + 9\hat{k}$

Ejemplo 2.29

Para el problema de la figura 2.42, calcule $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$

$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 9\hat{k} \qquad \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = 9\hat{k}$

Ejemplo 2.30

Para los problemas dados a continuación, calcule: $3\vec{V_1} - 2\vec{V_2}$

$$\boxed{\vec{V_1} = 5\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} + 9\hat{k}} \qquad \boxed{\vec{V_2} = 5\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} + 0\hat{k}}$$

Para obtener el vector $3\vec{V}_1$, se multiplica el escalar 3 por cada una de las componentes del vector. Se hace lo mismo para obtener el vector $-2\vec{V}_2$

$$3\vec{V}_1 = 15\hat{i} + 24\hat{j} + 27\hat{k}$$

$$-2\vec{V}_2 = -10\hat{i} - 16\hat{j} + 0\hat{k}$$

Se puede obtener la operación $3\vec{V}_1 - 2\vec{V}_2$ como la suma del vector $3\vec{V}_1$ más el vector $-2\vec{V}_2$. Es decir:

$$3\vec{V}_1 + \left(-2\vec{V}_2\right) = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 27\hat{k}$$

PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES EN TRES DIMENSIONES

En la Física se conocen dos tipos de multiplicación de vectores. Uno es el producto escalar, conocido también como producto punto de vectores cuyo resultado es un escalar. El otro tipo es el producto vectorial, conocido también como producto cruz de vectores y su resultado es un vector. Por el momento se estudiará el producto punto de vectores.

Sean dos vectores $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ y

$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

El producto punto entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ denotado por $\vec{A} \cdot \vec{B}$ se define como:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = ABcos\theta$ donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Observe que A y B son las magnitudes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ respectivamente

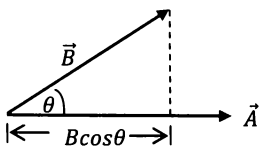


Figura 2.42

El producto $\vec{A} \cdot \vec{B}$ se puede escribir como:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A(Bcos\theta)$

La cantidad $\boldsymbol{Bcos\theta}$ representa la proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}$. Se deducirá que la cantidad $Bcos\theta$ es igual al producto punto $\vec{B} \cdot \hat{u}_A$ donde $\hat{u}_A$ es el vector unitario en la dirección del vector $\vec{A}$.

$$(Bcos\theta) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A}$$

Se puede observar que la cantidad $\frac{\vec{A}}{A}$ es la definición del vector unitario en la dirección de $\vec{A}$. $(\hat{u}_A)$ Así:

La proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}$ es igual a $\hat{u}_A \cdot \vec{B}$

PRODUCTO PUNTO DE LOS VECTORES UNITARIOS $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$

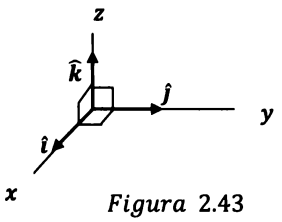


Figura 2.43

Los ejes *x*, *y*, y *z* forman entre sí 90^0

$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = 1(1)\, cos0^0 = 1$

$\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = 1(1)cos0^0 = 1$

$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1(1)cos0^0 = 1$

En conclusión cuando un vector unitario se multiplica (mediante el producto escalar) por si mismo el resultado es la unidad.

Ahora se estudiará la multiplicación escalar de dos vectores unitarios diferentes que forman 90^0 entre sí.

$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = 1(1)cos90^0 = 0$

$\hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 1(1)cos90^0 = 0$

$\hat{k} \cdot \hat{\imath} = 1(1)cos90^0 = 0$

Y como el producto punto es conmutativo, es decir que $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$, se concluye que:

$\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} = \hat{k} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\imath} \cdot \hat{k} = 0$

Ejemplo 2.31

Calcule $\vec{A} \cdot \vec{A}$

$\vec{A} \cdot \vec{A} = A(A)cos0^0 = A^2$

Es decir, que cualquier vector multiplicado escalarmente por si mismo el resultado es su módulo elevado al cuadrado.

Ejemplo 2.32

Calcule el producto punto de los siguientes vectores:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \qquad y \qquad \vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

Solución

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right) \cdot \left(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}\right)$$

Al multiplicar se obtiene 9 términos, de los cuales, 6 se hacen cero pues serían la multiplicación de vectores unitarios que forman 90^0 entre sí. Además, se debe recordar que la multiplicación escalar de un vector unitario por si mismo es igual a 1.

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

Ejemplo 2.33

Dado los vectores $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 6\hat{k}$ y $\vec{B} = -3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 4\hat{k}$,

a) Calcule el producto punto $\vec{A} \cdot \vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 2 \times (-3) + 4 \times 1 + (-6 \times 4)$$
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -26$$

b) Calcule el ángulo que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

Recordando que $\vec{A} \cdot \vec{B} = -26$

calculando la magnitud del vector $\vec{A}$

$$A = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-6)^2} = 7.48$$

y, calculando la magnitud del vector $\vec{B}$

$$B = \sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2} = 5.1$$

Como: $$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-26}{7.48 \times 5.1} \qquad \theta = \cos^{-1}(-0.68) \qquad \theta = 133^0$$

Ejemplo 2.34

En la figura se muestran dos vectores, $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$. Se pide:

a) Determinar el producto punto entre estos dos vectores.

b) Determinar el ángulo θ entre los dos vectores, usando el producto punto.

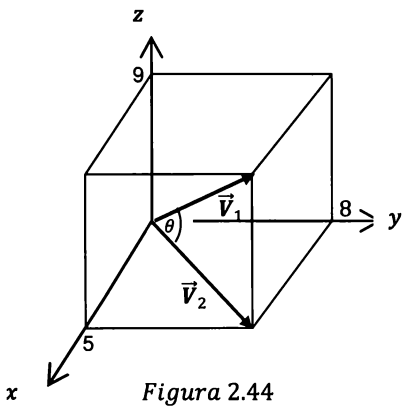


Figura 2.44

$$\vec{V}_1 = 5\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} + 9\hat{k}$$

$$\vec{V}_2 = 5\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

a) $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 5 \times 5 + 8 \times 8 + 9$

$$\boxed{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 89}$$

b)

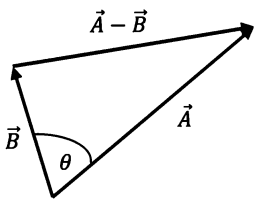
$$\boxed{V_1 = \sqrt{5^2 + 8^2 + 9^2} = 13}$$

$$\boxed{V_2 = \sqrt{5^2 + 8^2 + 0^2} = 9.4}$$

$$cos\theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{V_1 V_2} = \frac{89}{13 \times 9.4} = 0.728 \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}(0.728\ ) \Rightarrow \quad \theta = 43.3^0$$

ACTIVIDAD 2.11

Para los vectores mostrados calcule $\vec{A} - \vec{B}$.
$A = 10u; \quad B = 4u: \quad \theta = 30^0; \quad cos30^0 = 0.866.$



ACTIVIDAD 2.12

Si el vector $\vec{A}$ se halla en el plano xy, ¿cuál es el ángulo que este vector forma con el vector unitario $\hat{k}$?

ACTIVIDAD 2.13

Un vector $\vec{A}$ se halla en el plano xy y otro vector $\vec{B}$ se halla en el plano yz. ¿Será el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ necesariamente 90^0?

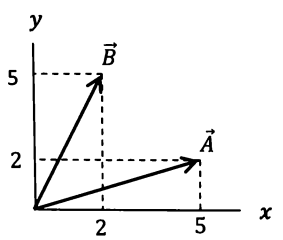
ACTIVIDAD 2.14

Suponga que un vector $\vec{A}$ tiene una magnitud de 5 unidades, ¿cuál es el valor de $\vec{A} \cdot \vec{A}$?

a) 0
b) 5
c) 10
d) 25
e) El producto $\vec{A} \cdot \vec{A}$ no tiene definición.

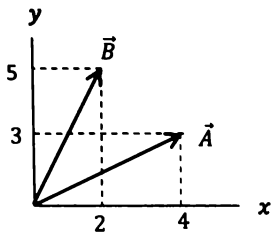
ACTIVIDAD 2.15

Calcule el coseno del ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ mostrados en la figura.



ACTIVIDAD 2.16

Con respecto a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ mostrados en la figura, calcule la proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}$.



ACTIVIDAD 2.17

Calcule la proyección del vector $10\hat{k}$ sobre la dirección del vector $5\hat{\imath}$.

ACTIVIDAD 2.18

¿Cuál de las siguientes alternativas representa a un vector unitario?

a) $\hat{\imath} + \hat{\jmath}$
b) $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$
c) $\frac{1}{2}\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath}$
d) $\frac{1}{3}\hat{\imath} + \frac{1}{3}\hat{\jmath} + \frac{1}{3}\hat{k}$
e) $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\jmath}$

ACTIVIDAD 2.19

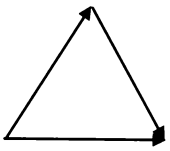
¿Es Correcto afirmar que el producto punto entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ representa la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$?

SI ☐ NO ☐

ACTIVIDAD 2.20

La figura muestra el siguiente sistema de **tres vectores**, donde el triangulo formado es un triangulo equilátero de lado igual a 2 unidades. Determine la magnitud de la resultante de la suma vectorial de todos los vectores del sistema.

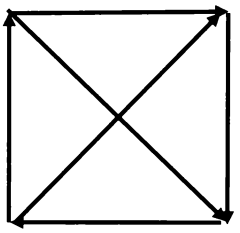
a) 0 unidades
b) 2 unidades
c) 3 unidades
d) 4 unidades
e) 6 unidades



ACTIVIDAD 2.21

Encontrar la magnitud del vector resultante del siguiente sistema de vectores mostrados en la figura, sabiendo que el lado del cuadrado mide 2 unidades:

a) 2 unidades
b) 4 unidades
c) 6 unidades
d) $2\sqrt{2}$ unidades
e) $6\sqrt{2}$ unidades



ACTIVIDAD 2.22

Dos vectores tienen una resultante máxima de 55 unidades y una resultante mínima de 15 unidades. ¿Cuál sería el posible valor de las magnitudes de cada uno de los vectores?

a) 0 unidades y 55 unidades
b) 20 unidades y 35 unidades
c) 5 unidades y 11 unidades
d) 0 unidades y 70 unidades

ACTIVIDAD 2.23

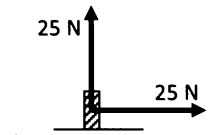
Conociendo el vector $\vec{v}_1$ y el vector $\vec{r}_2$, con sus siguientes componentes ortogonales $\vec{v}_1 = (10\ m/s)\hat{\imath} + (4\ m/s)\hat{\jmath}$ y $\vec{r}_2 = (16\,m)\hat{\imath} - (4\,m)\hat{\jmath}$. ¿Cuál es la magnitud del vector $\vec{v}_1 - \vec{r}_2$?

a) 10 m
b) 2 m/s
c) 10 m/s
d) 2 m
e) Es imposible realizar esta operación.

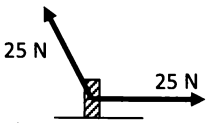
ACTIVIDAD 2.24

Dos fuerzas de 25 N cada una, actúan simultáneamente en un mismo soporte. ¿En cuál de los siguientes gráficos se ejerce la mayor fuerza resultante sobre el soporte?

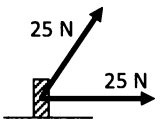
a)



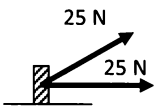
b)



c)



d)



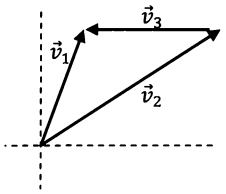
ACTIVIDAD 2.25

Si la suma entre tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ es nula, entonces escoja la alternativa correcta.

a) La suma de dos de ellos es igual al tercero.
b) La magnitud de $\vec{A}$+$\vec{B}$ es igual a la magnitud de $\vec{C}$.
c) Los tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son paralelos.
d) Los tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son perpendiculares.

ACTIVIDAD 2.26

Determine la magnitud del vector que al sumarse con los vectores mostrados en la figura, se obtenga una resultante nula. Se conoce que la magnitud de los vectores son: $|\vec{v}_1| = 8\,m$; 60^0 , $|\vec{v}_2| = 10\,m$.



a) 0 m
b) 8 m
c) 16 m
d) 20 m
e) Es imposible determinar la magnitud del vector.

ACTIVIDAD 2.27

Se tiene un vector $\vec{A}$ de 4 unidades de magnitud dirigido hacia abajo y un vector $\vec{B}$ de 3 unidades de magnitud dirigido hacia arriba. ¿Cuál sería el valor del vector $\vec{A} - 2\vec{B}$?

a) 2 unidades de magnitud dirigida hacia abajo.
b) 2 unidades de magnitud dirigida hacia arriba.
c) 6 unidades de magnitud dirigida hacia abajo.
d) 10 unidades de magnitud dirigida hacia abajo.
e) 10 unidades de magnitud dirigida hacia arriba.

ACTIVIDAD 2.28

Se conoce un vector $\vec{A}$ que tiene una magnitud de 15 unidades y una dirección al Norte, un vector $\vec{B}$ que tiene una magnitud de 3 unidades y una dirección Oeste, y un vector $\vec{C}$ que tiene una magnitud de 11 unidades al Sur. Determine la magnitud del vector resultante de la suma entre $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

a) 6 u.
b) 5 u
c) 29 u
d) 7 u

2.15 PRODUCTO CRUZ

Cuando se aplica el producto cruz a dos vectores, el resultado es otro vector. Este nuevo vector es perpendicular a los vectores que se multiplican. Se define como:

$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = AB sen\theta \tag{2.26}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

El producto cruz representa geométricamente el área del paralelogramo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

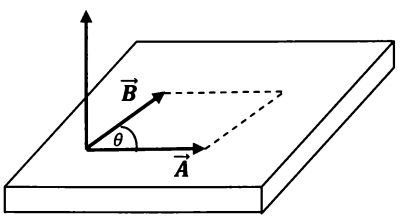


Figura 2.45

Para determinar la dirección del producto cruz se utiliza la regla de la mano derecha o la regla del tornillo.

Por ejemplo, se desea conocer la dirección del vector $\vec{A} \times \vec{B}$

1. Se coloca la mano derecha con los dedos apuntando en la dirección del primer vector, en este caso, en dirección del vector $\vec{A}$, y luego se dobla la mano hacia el vector $\vec{B}$; el pulgar extendido indica la dirección del vector $\vec{A} \times \vec{B}$

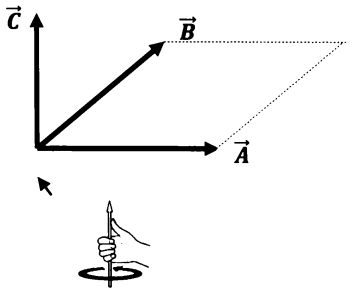
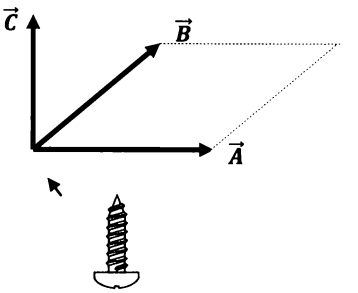


Figura 2.46



Para hallar la dirección del vector $\vec{C}$, el tornillo gira de $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$. Por lo tanto, el tornillo se mueve hacia arriba.

A continuación se mostrará que el módulo del vector $\vec{A} \times \vec{B}$ representa el área del paralelogramo formado por estos dos vectores. Suponga que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se hallan en el plano del papel.

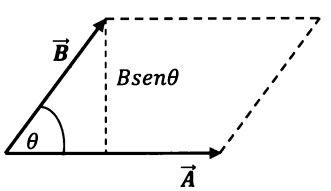


Figura 2.47

Se observa que el producto $ABsen\theta$ es el área del paralelogramo y también es igual a $|\vec{A} \times \vec{B}|$

El área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es igual al producto del cateto A por la altura que es $Bsen\theta$. Es decir, el área del paralelogramo sería:

$$Area = \text{ABsen}\theta$$

Este último resultado no es otra cosa que la magnitud del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$.

Así: Área del paralelogramo $= |\vec{A} \times \vec{B}|$ (2.27)

FORMA DE CALCULAR EL PRODUCTO $\vec{A} \times \vec{B}$.

Sean los vectores $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ y $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$

Con el fin de hallar el producto cruz $\vec{A} \times \vec{B}$ se usa el método de ***determinantes.***

Se colocan los vectores unitarios $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ en la primera fila. En la segunda fila se coloca las componentes del primer vector, esto es, del vector $\vec{A}$. Finalmente, en la tercera fila se coloca las componentes del segundo vector, esto es, del vector $\vec{B}$. Este arreglo queda de la siguiente manera.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}(A_yB_z - A_zB_y) - \hat{\jmath}(A_xB_z - A_zB_x) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

Como se puede observar, el resultado es un vector. Ahora, la magnitud de este vector representa el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Ejemplo 2.35

Sean los vectores: $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$

$\vec{B} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$

Calcule el área del triángulo formado por los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, *y el vector* $\vec{A} - \vec{B}$

Solución

Aunque estos vectores están en el espacio, se puede graficar con el fin de observar los tres vectores y resolver el problema. Debe recordarse que el producto $\vec{A} \times \vec{B}$ da como resultado el vector $\vec{C}$, el cual es perpendicular tanto al vector $\vec{A}$ como al vector $\vec{B}$ y su módulo es el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Para hallar el área del triángulo formado por los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, y $\vec{A} - \vec{B}$, se debe dividir para 2 el área del paralelogramo.

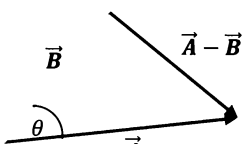


Figura 2.48

Primero se realizará el producto $\vec{A} \times \vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2 - 6)\hat{\imath} - (2 - 9)\hat{\jmath} + (4 + 6)\hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -8\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} + 10\hat{k}$$

El módulo de este vector es el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=\sqrt{(-8)^2+(7)^2+(10)^2} \qquad |\vec{A}\times\vec{B}| = 14.6u^2$$

Por lo tanto, el área del mencionado triángulo será:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}(14.6) = 7.3u^2$$

2.16 PRODUCTO TRIPLE ESCALAR

El producto triple escalar consiste en realizar la siguiente operación:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$$

(2.28)

donde los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ no están en un plano sino en el espacio.

Suponga que:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{C} = C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath} + C_z\hat{k}$$

Cuando se realiza el producto cruz, entre A y B, da como resultado un vector. Por lo tanto este último vector al multiplicarse escalarmente con el vector $\vec{C}$ da como resultado un escalar.

Una forma de calcular este producto triple escalar es la siguiente:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$$

Luego, este resultado debe multiplicarse (escalarmente) con el vector $\vec{C}$. Por lo tanto:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = (A_yB_z - A_zB_y)C_x - (A_xB_z - A_zB_x)C_y + (A_xB_y - A_yB_x)C_z$$

Este resultado puede ser obtenido mediante una sola operación.

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)C_x - (A_xB_z - A_zB_x)C_y + (A_xB_y - A_yB_x)C_z$$

Se observa que el resultado obtenido es el mismo.

Una aplicación del producto triple escalar es el cálculo del volumen de un paralelepípedo.

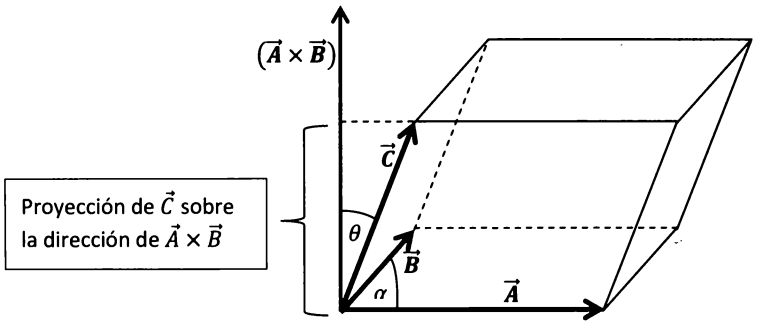


Figura 2.49

El volumen de un paralelepípedo es el producto del área de la base por la altura.

El área de la base es igual al **módulo** del producto cruz $\vec{A}\times\vec{B}$. La altura es la proyección del vector $\vec{C}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}\times\vec{B}$.

La altura del paralelepípedo es igual a $|Ccos\theta|$.

Observe que: $$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = |\vec{A}\times\vec{B}||\vec{C}|cos\theta$$

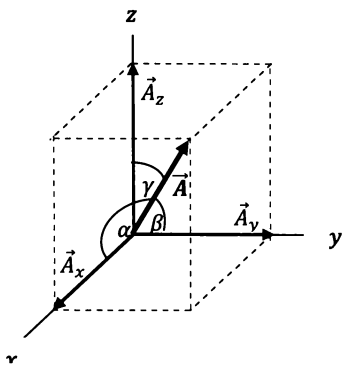
Así, $|\vec{C}|cos\theta = \frac{(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}$ que es la altura del paralelepípedo. Este valor multiplicado por el área de la base que es $|\vec{A}\times\vec{B}|$ da como resultado el volumen del paralelepípedo.

$$V = \frac{(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}|\vec{A}\times\vec{B}|$$

Por lo tanto, $V = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$ es el volumen del paralelepípedo cuyos lados son los vectores $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$.

2.17 COSENOS DIRECTORES

Los cosenos directores de un vector son los cosenos de los ángulos que el vector forma con los ejes x, y y z. La nomenclatura usada en general es: El ángulo que el vector forma con el eje x es α. El que forma con el eje y es β y el que forma con el eje z es el ángulo γ. En el siguiente diagrama se observan los ángulos directores.



Del gráfico:

$$cos\alpha = \frac{A_x}{A}$$

$$cos\beta = \frac{A_y}{A}$$

$$cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

Figura 2.50

Estos son los denominados *cosenos directores del vector* $\vec{A}$

Recordando el caso del vector unitario, vamos a escribirlo de acuerdo a su definición.

$$\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}}{A}$$

$$\hat{u}_A = \frac{A_x}{A}\hat{\imath} + \frac{A_y}{A}\hat{\jmath} + \frac{A_z}{A}\hat{k}$$

De la última ecuación se puede deducir que los coeficientes de los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, y $\hat{k}$ son los mismos que los cosenos directores del vector $\vec{A}$. Esto es, $cos\alpha$, $cos\beta$, y $cos\gamma$.

Por lo tanto, el vector unitario en la dirección del vector $\vec{A}$ puede escribirse en función de los cosenos directores de la siguiente forma:

$$\hat{u}_A = (cos\alpha)\hat{\imath} + (cos\beta)\hat{\jmath} + (cos\gamma)\hat{k}$$

Donde: $\hat{u}_A$ es el vector unitario en la dirección del vector $\vec{A}$.

Como la magnitud del vector unitario es la unidad, se puede llegar a la siguiente conclusión:

$$\sqrt{(cos\alpha)^2 + (cos\beta)^2 + (cos\gamma)^2} = 1$$

Y al elevar al cuadrado ambos lados de la última ecuación:

$$\boxed{(cos\alpha)^2 + (cos\beta)^2 + (cos\gamma)^2 = 1}$$

O, $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

(2.29)

Ejemplo 2.36

Un vector $\vec{A}$ forma una ángulo de 60^0 con el eje x y 80^0 con el eje y. Calcule los dos ángulos que este vector forma con el eje z.

Solución:

Aplicando la relación: $(cos\alpha)^2 + (cos\beta)^2 + (cos\gamma)^2 = 1$ y conociendo que:

$$\alpha = 60^0 \; y \;\; \beta = 80^0 \quad \text{despejando } \gamma \text{ queda :}$$

$$cos\gamma = \pm\sqrt{1 - (cos\alpha)^2 - (cos\beta)^2}$$

remplazando:

$$cos\gamma = \pm\sqrt{1 - cos^2 60^0 - cos^2 80}$$

$$cos\gamma = \pm 0.848 \Rightarrow \;\; \gamma_1 = 32^0; \;\; \gamma_2 = 148^0$$

Se puede observar que existen dos vectores que cumplen con las condiciones del problema. Se deja al estudiante para que visualice a estos dos vectores

Ejemplo 2.37

La cantidad física $\boldsymbol{\Phi} = \vec{E} \cdot \vec{A}$ representa el flujo eléctrico a través de una superficie, siendo $\vec{E}$ *el* vector campo eléctrico y $\vec{A}$el vector área. Si $\vec{E} = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ y $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$, *e*ntonces la suma del ángulo que se forma entre ellos, y el ángulo que forma el vector $\vec{E}$ con el eje y es:

Solución

Para conocer el ángulo entre dos vectores usaremos el producto punto. $\vec{E} \cdot \vec{A} = EAcos\Omega$

Así tenemos $$\cos\Omega = \frac{\vec{E}\cdot\vec{A}}{EA}$$

$$\cos\Omega = (5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}).(2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})/[7.35 \times 2.83]$$

$$\cos \Omega = \frac{6}{20.8} \Rightarrow \text{Cos } \Omega = 0{,}288 \qquad \boldsymbol{\Omega = 73{,}2^0}$$

Ahora para conocer el ángulo que forma el vector $\vec{E}$ con el eje de las y usaremos los cosenos directores.

$$cos\beta = \frac{2}{7.35} \qquad \Rightarrow \qquad cos\beta = 0.272 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\beta = 74.2^0}$$

Finalmente sumamos los ángulos obtenidos y tenemos que el valor requerido:

$$\boldsymbol{\theta = 73.2^0 + 74.2^0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\theta = 147.4^0}}$$

PROBLEMAS

2.1 Calcule el producto punto entre los vectores $\vec{A} = 5\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ y $\vec{B} = -3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

a) $-15\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$
b) -12
c) -15
d) -17
e) -21

2.2 Calcule el *coseno del ángulo* que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman entre ellos:

$\vec{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{k}$ $\quad \hat{B} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$

a) 1/3
b) 2/3
c) ½
d) ¼
e) 1/5

2.3 Si $\vec{A} = \hat{k}$ y $\vec{B} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$, calcule el producto punto $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

a) 3
b) 2
c) 1
d) CERO
e) -1

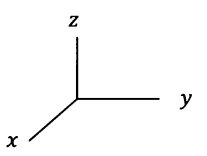
2.4 Dados los vectores $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$; $\vec{B} = -2i + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$; ¿Son estos vectores paralelos?

SI ☐ NO ☐

2.5 Calcule el ángulo que el vector $\vec{A}$ forma con el eje z.

$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$

a) $cos^{-1}(2/3)$
b) $cos^{-1}(-2/3)$
c) $cos^{-1}(1/3)$
d) $cos^{-1}(-1/3)$
e) $cos^{-1}(1/4)$



2.6 Calcule el área del triángulo formado por los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, y $\vec{A} - \vec{B}$

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}; \qquad \vec{B} = 2\hat{\imath} + \hat{k}$$

a) $1.0\,u^2$
b) $2.0\,u^2$
c) $3.0\,u^2$
d) $4.0\,u^2$
e) $5.0\,u^2$

2.7 Calcule un vector que sea perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$. Muestre el procedimiento detalladamente y paso a paso.

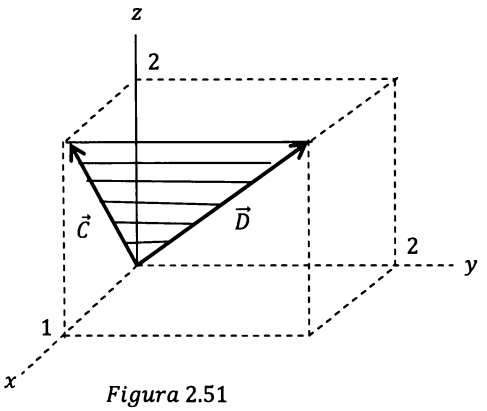


Figura 2.51

2.8 Si un vector está dado por: $\vec{M} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ y otro vector por: $\vec{P} = \hat{\jmath} + \hat{k}$, calcule la proyección de $\vec{M}$ sobre la dirección de $\vec{P}$. $\sqrt{2} = 1.41$

a) CERO
b) $2\sqrt{2}$
c) $\sqrt{2}$
d) $\sqrt{2}/_2$

2.9 Suponga que los cosenos directores de un vector están dados por:

$$cos\alpha = 0.8; \quad cos\beta = 0.6$$

¿cuál es el ángulo que este vector forma con el eje de las z? (calcule el ángulo γ).

$cos0^0 = 1$; $cos30^0 = 0.87$; $cos45^0 = 0.7$; $cos60^0 = 0.5$; $cos90^0 = 0$

a) 0^0
b) 30^0
c) 45^0
d) 60^0
e) 90^0

2.10 Un vector unitario está dado por: $\hat{u} = 0.5\hat{\imath} + 0.7\hat{\jmath} + 0.5\hat{k}$. ¿Cuál de las siguientes alternativas nos da los cosenos directores de este vector unitario?

	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$
a)	60^0	45^0	60^0
b)	0.5	0.7	0.5
c)	0.5	0.0	0.0
d)	0.5	0.7	indefinido

e) Este vector no puede existir.

2.11 Si α, β, y γ son los ángulos que el vector $\vec{A}$ forma con los ejes x, y, y z respectivamente, ¿cuál de las siguientes alternativas es la correcta?

a) $cos\alpha + cos\beta + cos\gamma = 1$

b) $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 0$

c) $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$

d) $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$

e) Si $\alpha = 35^0$, $\beta = 55^0$ entonces $cos\gamma = 0$

2.12 Si dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entonces es cierto que:

a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = ABcos0^0$

b) $\vec{A} \times \vec{B} = 0$

c) $\sqrt{A^2 + B^2} = 0$

d) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$

e) $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|$

2.13 ¿Cuál de las siguientes alternativas es la correcta?

a) $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ es un vector unitario

b) El $cos\alpha$ del vector $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ es igual a 1.

c) El $cos\alpha$ del vector $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ es igual a $\sqrt{3}$

d) El $cos\alpha$ del vector $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ es igual $\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ es un vector que no existe.

2.14 ¿Cùál es el valor de ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para que $|\vec{A} \times \vec{B}| = \vec{A} \cdot \vec{B}$?

a) 30^0

b) 45^0

c) 60^0

d) 90^0

e) 0^0

2.15 Calcule el área del paralelogramo formado por los vector$\vec{A}$ y $\vec{B}$ mostrados en la figura.

a) $6\sqrt{5}$

b) $5\sqrt{5}$

c) $4\sqrt{5}$

d) $3\sqrt{5}$

e) $2\sqrt{5}$

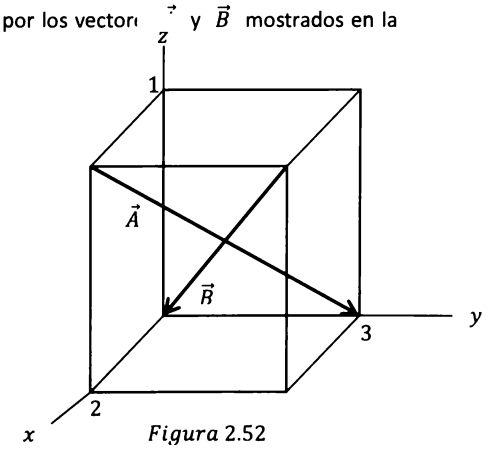


Figura 2.52

2.16 Si un vector es $\vec{A} = 2\hat{\imath} + \hat{k}$ y otro vector es $\vec{B} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$, ¿cuál es el coseno del ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$?

a) $^2/_5$
b) $^3/_5$
c) $^4/_5$
d) 1.0
e) 0.0

2.17 ¿Cuál es el ángulo que forma el vector $2\hat{\imath} + \hat{k}$ con el eje z?

a) $cos^{-1}\left(^1/_{\sqrt{5}}\right)$
b) $cos^{-1}\left(^1/_5\right)$
c) 90^0
d) 45^0
e) 0^0

2.18 Calcule la proyección de un vector de 10 unidades que forma un ángulo de 30^0 con el eje positivo de las x sobre la dirección del vector $\hat{\jmath}$.

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

2.19 Si un vector se halla en el plano xy y otro vector se halla en el plano yz, entonces el ángulo entre estos dos vectores es:

a) 90^0
b) 45^0
c) 0^0
d) Ninguno de los anteriores.

2.20 Calcule la proyección del vector $\vec{A}$ sobre la dirección del vector $\vec{B}$. Los vectores están mostrados en el gráfico adjunto.

a) $\sqrt{26}$
b) 7
c) 5
d) 4
e) 1

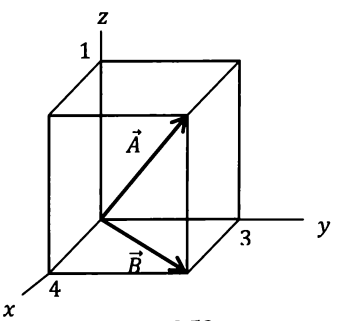


Figura 2.53

2.21 Sean $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + C_z\hat{k}$ y $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$ y además $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ y $\vec{A} \cdot \vec{B} \neq 0$

Entonces para que $\frac{\vec{C}}{\vec{A}\cdot\vec{B}} = 0$ se necesita que:

a) $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean paralelos

b) $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean antiparalelos

c) $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean iguales

d) Todas las opciones anteriores son válidas

2.22 Una partícula experimenta un vector desplazamiento $\overrightarrow{\Delta X_1}$ partiendo de $(1, 0, 2)$ y llegando al punto $(2, 1, 2)$. Por otra parte se tiene otro vector desplazamiento $\overrightarrow{\Delta X_2} = (2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+5\hat{k})$m Encontrar la magnitud del Vector $\overrightarrow{\Delta X_1}$ (en m) y además la proyección del vector $\overrightarrow{\Delta X_2}$ sobre $\overrightarrow{\Delta X_1}$.

2.23 Dada la figura en el plano encuentre la suma de los ángulos directores del vector que sea perpendicular a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

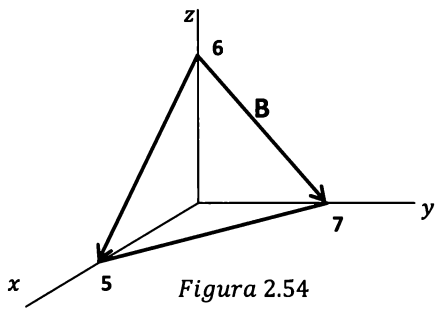


Figura 2.54

2.24 Dada la figura, encuentre El vector $\vec{C} = -\frac{1}{2}\vec{A} + 4\vec{B}$

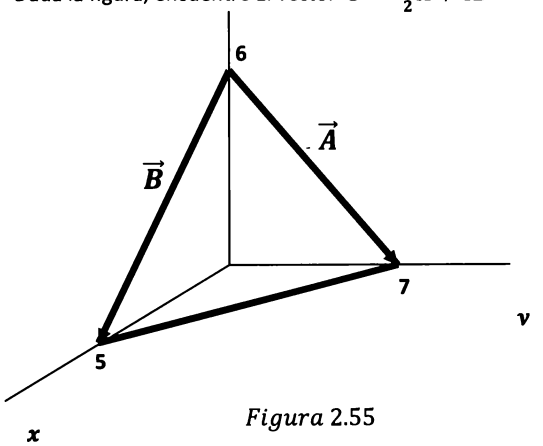


Figura 2.55

2.25 $\vec{A}, \vec{B}\ y\ \vec{C}$ son vectores que se hallan en el mismo plano. Señale la opción verdadera

a) $\vec{A}$ x $2\vec{B} = \vec{C}$

b) $\vec{A} + \vec{B} + 2\vec{C} = \vec{A}\,x\vec{B}$

c) $\vec{A} - 2\vec{B} = 0$

d) $2\vec{A} - 3\vec{B}$ = p (p es un escalar)

2.26 Sean $\vec{A} = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ $\vec{B} = -2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ y

$\vec{C} = -4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}$. *Entonces la multiplicación* $(\vec{A}x\vec{B}).\vec{C}$ *es*:

a) $2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 6\hat{k}$

b) -114

c) -18

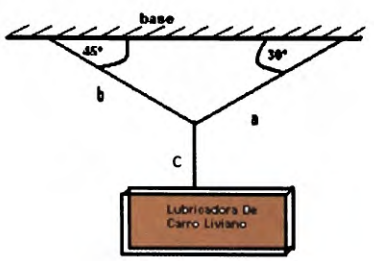
d) 114

2.27 Un expreso estudiantil después de salir de la escuela hace un recorrido de $500m$ en dirección Sur, luego $300m$ hacia el Oeste y por último recorre $125m$ hacia el Suroeste. Determine el desplazamiento resultante.

2.28 Un carro se desplaza $450m$ en una ruta muy despejada al Norte, luego recorre $200m$ al Este y finalmente $150m$ al Sur. Se Pide: Determinar el vector resultante.

2.29 Un anuncio publicitario tiene un sistema de soporte de dos cuerdas **a** y **b**, las cuales soportan un letrero que pesa $980N$ como se indica en la figura.

Si $\vec{T}_a + \vec{T}_b + \vec{T}_c = \mathbf{O}$ calcule las tensiones en cada cuerda.



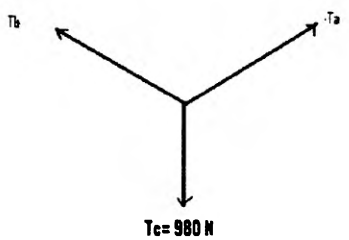


Figura 2.56

2.30 En un muelle se encuentran dos canoas sujetas a cierta distancia del muelle con un mismo punto común de soporte, la fuerza de tensión en las cuerdas de estas canoas son $F_1 = 1500N$ y $F_2 = 1000N$. Determine la fuerza resultante, $\vec{F}_R$,que se ejerce sobre el soporte del muelle.

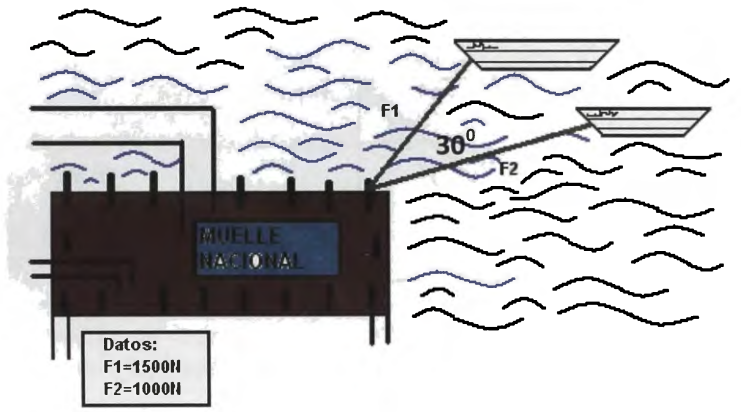


Figura 2.57

2.31 Una carrera de caballos tiene como recorrido 3 tramos, $\vec{a}$, $\vec{b}$, y $\vec{c}$, como se muestra en la figura, Si la meta coincide con en punto de partida.
Se pide determinar

a) La magnitud del vector $\vec{C}$.
b) El vector resultante.
c) La distancia total recorrida

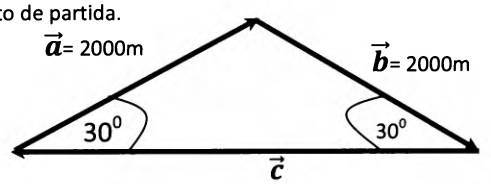


Figura 2.58

2.32 Determinar el área rayada entre los dos vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ dados en el siguiente grafico.

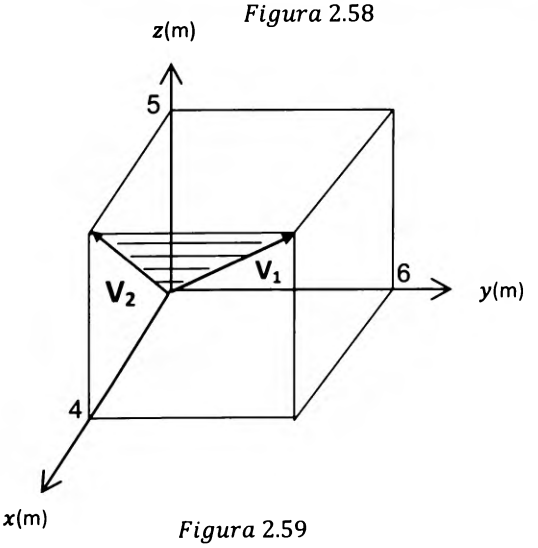


Figura 2.59

2.33 Dado los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ que se muestran en la figura. Calcule un vector perpendicular saliendo del plano formado por los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$

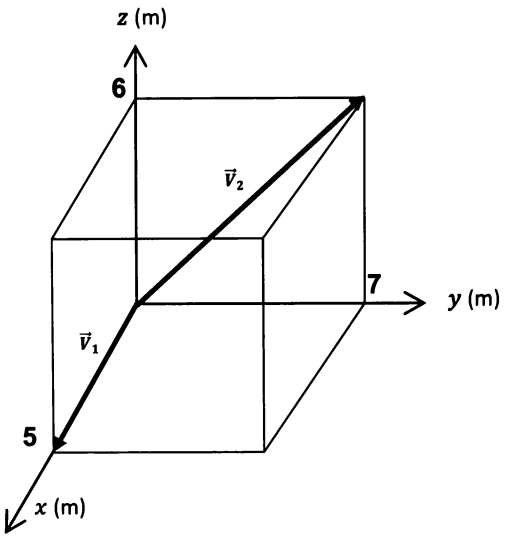


Figura 2.60

2.34 Dado los e muestran en la figura. Se pide: Determinar el ángulo θentre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, usando el método del producto vectorial.

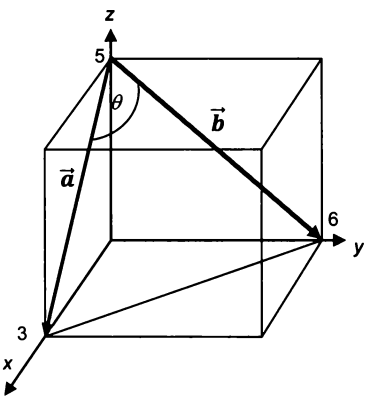


Figura 2.61

2.35 Sean los vectores $\vec{V}_1 \, y \, \vec{V}_2$ ortogonales entre ellos. Si $\vec{V}_1 = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ y $\vec{V}_2 = 3\hat{\imath} + \alpha\hat{\jmath} + 3\hat{k}$
Se pide:

a) Calcular el área del paralelogramo formado por los dos vectores

b) Halle los ángulos directores del vector $\mathbf{V_2}$

2.36 Sean los vectores $\vec{V}_1 = 8\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} + 6\hat{k}$, $\vec{V}_2 = -10\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 7\hat{k}$ y $\vec{V}_3$ tal que: $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \mathbf{0}$. Determine $\vec{V}_1 - 2\vec{V}_2 + \vec{V}_3$

2.37 Halle el vector resultante de los siguientes vectores:
$\vec{F}_1 = 5$ N, 0°
$\vec{F}_2 = 8$ N, 30°
$\vec{F}_3 = 10$ N, 150°
$\vec{F}_4 = 4$ N, 270°
$\vec{F}_5 = 10$ N, 315°

2.38 La suma de dos vectores $\vec{V}_1 \, y \, \vec{V}_2$ es el vector $\vec{V}_R$ de magnitud 5.15 unidades y un ángulo de 190.3^0con respecto al eje positivo de las x , si $\vec{V}_1 = 5u, 30^0$¿cuál es el vector $\vec{V}_2$?

2.39 Los vectores $\vec{A} \, y \, \vec{B}$ se encuentran en el plano X-Y, el vector $\vec{A} = 10u$, 30^0 y el vector $\vec{B}$ tiene una magnitud de $8u$, si la magnitud del vector resultante es de $16.34u$ y está en el primer cuadrante, encuentre el ángulo que forma el vector $\vec{B}$ con el eje positivo de las x.

2.40 Sean los vectores $\vec{F}_1 = 8\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k} \, y \, \vec{F}_2 = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$

a) Utilizando la ley del coseno halle el ángulo entre $\vec{F}_1 \, y \vec{F}_2$

b) Halle los ángulos directores de la resultante .

2.41 Dados los vectores $\vec{V}_1 = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 8\hat{k} \, y \, \vec{V}_2 = -2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + \hat{k}$, halle un vector de magnitud 8, en la dirección de $2\vec{V}_1 - 3\vec{V}_2$

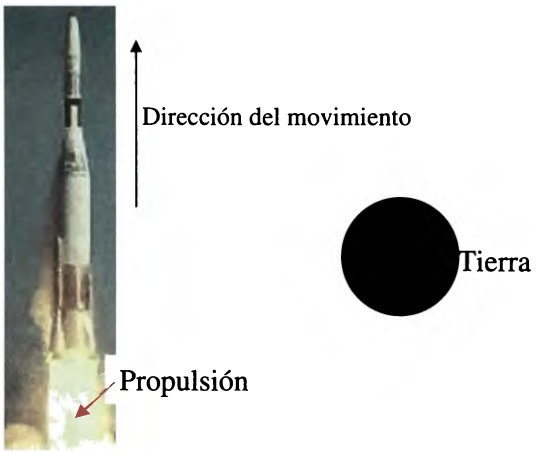
2.42 El producto punto de 2 vectores es16. El vector $\vec{A} = 8\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$y el vector $\vec{B} = k\hat{\imath}$, donde k es una constante. Halle el ángulo entre los vectores $\vec{A} \, y \, \vec{B}$.

2.43 Sea el vector $\vec{A} = 3u$, 30^0 y el vector $\vec{B}$ tiene como magnitud $4u$. Si la magnitud del vector resultante es de$6.35u$, halle el producto escalar entre $\vec{A} \, y \, \vec{B}$.

2.44 Dados los vectores $\vec{A} = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k} \, y \, \vec{B} = -2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + \hat{k}$, halle un vector de magnitud 10, perpendicular al plano que forma $\vec{A} \, y \, \vec{B}$.

2.45 Dados los vectores $\vec{A} = 8\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 3\hat{k} \, y \, \vec{B} = -4\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, encuentre el área del paralelogramo formado por estos vectores.

CINEMÁTICA EN UNA DIMENSIÓN



CAPÍTULO 3

INTRODUCCIÓN

La Mecánica estudia la cinemática y la dinámica. La primera se encarga del movimiento sin importar las causas que lo producen, mientras que la dinámica introduce el concepto de "fuerza" como la causa por la que los cuerpos adquieren movimiento, se detienen o cambian su dirección. Los cambios de posición de un objeto implica que existe un movimiento, pero no se debe olvidar que el tiempo juega un papel importante. De hecho un objeto cambia su posición en un lapso de tiempo.

3.1 DESPLAZAMIENTO

El vector *posición* en la Física representa un vector que parte del origen de un sistema de ejes cartesianos y se dirige hasta donde se halla la partícula. Conforme el objeto se mueve, el vector posición también se moverá. Suponga que un auto se halla a 10 metros hacia la derecha del origen, entonces su posición será $+10\hat{\imath}$ metros. Si el auto se mueve hasta hallarse a 30 metros a la derecha del origen, su nueva posición será $+30\hat{\imath}$ metros. El auto puede seguir moviéndose y el vector posición determinará la posición de aquel a los diferentes tiempos correspondientes. La figura 3.1 muestra dos vectores posición (en rojo).

El desplazamiento en física es un vector que muestra el cambio de posición de un objeto.. El diagrama de la figura 3.1 muestra el vector posición en rojo y la esfera representa el objeto. Se observa que después de un intervalo de tiempo la posición de la esfera cambia del punto A al punto B. La diferencia de posición se define como desplazamiento (flecha verde).

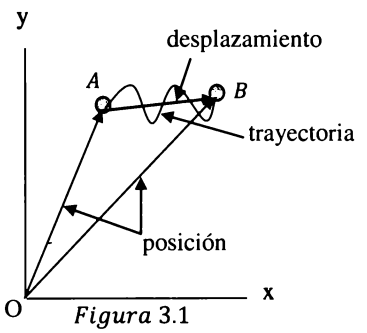


Figura 3.1

Luego de analizar la figura se puede concluir que el desplazamiento es el vector que parte de la posición inicial donde se halla el objeto y se dirige hacia la posición final hasta donde se ha movido el objeto. Este movimiento ha sido realizado en un intervalo de tiempo Δt. Es decir, desplazamiento es la distancia vectorial más corta entre las dos posiciones de un objeto.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i \qquad (3.1)$$

donde $\vec{r}$ se define como "vector posición"

En el caso del movimiento en una dimensión: $\Delta x = x_f - x_i$ y no se necesita escribir la flecha pues si la posición es hacia la derecha es positiva y si es hacia la izquierda es negativa.

Ejemplo 3.1

Una partícula se mueve desde x = *-5m* hasta x = *9m*. Calcule su desplazamiento.

En este caso: $x_i = -5m \quad x_f = 9m \quad \Delta x = x_f - x_i$

$$\Delta x = 9m - (-5m) \qquad \Delta x = 14m \quad \textit{hacia la derecha.}$$

En general, el movimiento no necesariamente tiene que ser en la dirección x sino que puede ser a lo largo de una recta cualquiera. A cierta dirección de la recta se le asigna el signo positivo y en la dirección contraria el signo negativo.

Ejemplo 3.2

Una partícula se mueve en línea recta una distancia de *10m* en dirección *Noreste*; luego se mueve *6m* en dirección *Suroeste*. Calcule su desplazamiento.

La partícula se mueve $10m$, desde el origen y en dirección Noreste; luego regresa por la misma recta una distancia de $6m$ en dirección hacia el origen, por lo tanto queda a $4m$ del origen.

En este caso, se puede decir que la posición inicial es $x_i = 0m$ *y que la posición final es* $x_f = 4m$. Por lo tanto, el desplazamiento es: $\Delta x = x_f - x_i = +4 - 0m \quad \Delta x = +4m$ como muestra la figura 3.2.

El signo positivo indica que el desplazamiento de la partícula es hacia el Noreste que es la dirección que se escogió como positiva.

En forma gráfica: Supongamos que la partícula parte del origen.

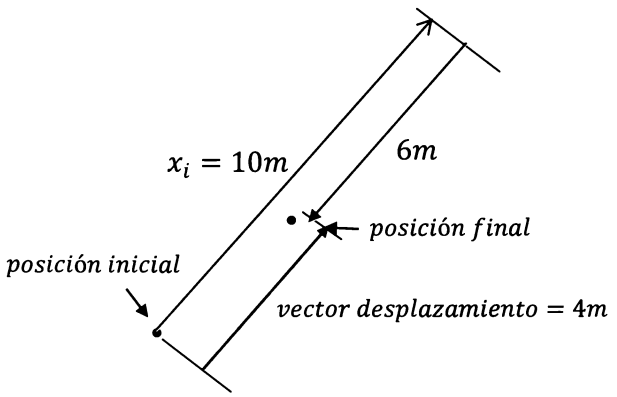


Figura 3.2

Conforme el movimiento sea en línea recta, sólo hay dos posibilidades, o el movimiento es positivo o es negativo. Así, cualquier dirección puede ser escogida como el eje *x*.

3.2 RAPIDEZ MEDIA

Todas las personas están acostumbradas a observar objetos que se están moviendo. Las personas se mueven de un lugar a otro en cierto tiempo, las aves vuelan de un árbol a otro recorriendo diferentes distancias en un intervalo de tiempo. Para saber que tan rápido se mueve un objeto, observamos que es importante conocer la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla. Esta relación se la conoce como rapidez media. La distancia recorrida no tiene que ser necesariamente en línea recta sino que puede tener una trayectoria cualquiera, sea esta curvilínea, a lo largo del perímetro de un cuadrado, etc.

La rapidez media se define como la distancia total recorrida dividida para el tiempo empleado.

$$Rapidez\ media = \frac{distancia\ recorrida}{tiempo\ empleado}$$

$$R = \frac{d}{t}\ \ y\ sus\ unidades\ son\ m/s \qquad (3.3)$$

Debido a que la distancia recorrida es una cantidad escalar, se concluye que la rapidez media es también un escalar. Debe recordarse que un escalar es una cantidad que sólo tiene magnitud y sus correspondientes unidades.

Debe notarse que la distancia recorrida no siempre es igual al módulo del desplazamiento. Estas dos cantidades son iguales siempre y cuando el movimiento sea en línea recta y en la misma dirección.

Ejemplo 3.3

Suponga que un objeto puede recorrer 6.0 *km* en 10.0 minutos. ¿Cuál es su rapidez media? Exprese su respuesta en m/s.

$$rapidez\ media = \frac{6.0km}{10.0min} \times \frac{1000m}{1.0km} \times \frac{1min}{60s} = 10.0\frac{m}{s}$$

3.3 VELOCIDAD MEDIA

La velocidad media es una cantidad vectorial, es decir que a más de tener magnitud tiene dirección. Note que la rapidez media no nos dice nada acerca de la dirección. La velocidad media relaciona el desplazamiento realizado y el intervalo de tiempo. Debe recordarse que si una partícula se mueve de un lugar a otro, el desplazamiento es el vector que parte del punto inicial y se dirige al punto final (en línea recta). Por lo tanto, la distancia recorrida por un objeto no siempre va a ser igual a la magnitud del desplazamiento. Debido a que el desplazamiento es un vector, la velocidad media es un vector también.

La velocidad media se define como el desplazamiento dividido para el tiempo transcurrido.

$$velocidad\ media = \frac{desplazamiento}{tiempo\ empleado}$$

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} \qquad (3.4)$$

Ejemplo 3.4

Un auto A se mueve con una velocidad media de *25 m/s* durante *90s*. Otro auto *B* que parte *10s* más tarde cubre una distancia de *150 m* más que el auto A y ambos llegan al mismo destino y al mismo tiempo. ¿Cuál es la velocidad media del auto *B*?

Auto A: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \Delta x = v_m \times \Delta t \qquad \Delta x = 25\frac{m}{s} \times 90s \qquad \Delta x = 2250m$

Por lo tanto el auto B recorre: $\Delta x_B = 2250m + 150m = 2400m$

Como el auto B parte 10s más tarde, el tiempo del B será de 80s.

Auto B: $v_m = \frac{2400m}{80s} = 30.0\frac{m}{s}$

3.4 VELOCIDAD INSTANTANEA

La velocidad instantánea es aquella que se mide en un intervalo sumamente pequeño de tiempo. Esta velocidad nos indica que tan rápido se mueve una partícula en cada instante durante el recorrido. La velocidad media, aunque es constante, esto no implica que durante el recorrido la partícula deba moverse con rapidez variable ya que sólo interesa cubrir un desplazamiento en determinado intervalo de tiempo. Así, la velocidad media, que es constante, sin embargo la partícula puede moverse en un momento más lento y en otro momento más rápido. Por lo tanto, Si la velocidad instantánea se la mide en un tiempo sumamente pequeño, entonces será igual a la velocidad media siempre que sea medida en un tiempo extremadamente pequeño.

$$\vec{v}_{ins} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (\boldsymbol{Si\ \Delta t\ tiende\ a\ cero}) \qquad (3.5)$$

$$\vec{v}_{ins} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (3.6)$$

esto se lee: "límite cuando el tiempo tiende a cero de la velocidad media.

La dirección de la velocidad instantánea es tangente a la trayectoria. Cuando un objeto se lo deja caer desde cierta altura, el objeto tendrá infinitas velocidades instantánea porque para cada instante muy pequeño de tiempo habrá una velocidad diferente.

3.5 ACELERACIÓN

Cuando la velocidad de un objeto cambia se dice que el objeto tiene una aceleración. El objeto puede cambiar la magnitud, la dirección o ambas de su velocidad y tendrá aceleración. Es decir, la aceleración proviene del cambio del vector velocidad. Si la velocidad del objeto es constante (no cambia ni la magnitud ni la dirección) la aceleración será cero.

La aceleración media se define como:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_o}{t_f - t_o} \quad \textit{Las unidades de } \vec{a} \textit{ son } \frac{m}{s^2} \qquad (3.7)$$

La aceleración instantánea es el valor de la aceleración en un intervalo muy pequeño de tiempo.

$$\vec{a}_{ins} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad \text{si } \Delta t \to 0 \qquad (3.8)$$

la dirección de la aceleración es la misma que la del vector $\overrightarrow{\Delta v}$.

Recuerde que Δt *debe ser muy pequeño.*

En este capítulo se estudiará solamente casos en los que la aceleración será constante.

Cuando la aceleración de una partícula es constante y si la partícula se mueve en línea recta, se dice que la partícula tiene un movimiento rectilíneo uniformemente variado. Si la aceleración es cero, entonces el movimiento es rectilíneo uniforme.

Para entender el concepto de aceleración se dará un ejemplo:

Ejemplo 3.5

Suponga que un móvil se mueve a 2 m/s^2 y que parte del reposo. En la tabla *2.1* se muestra la forma en que la velocidad del móvil cambia con el tiempo. En la columna de la izquierda se observa que el tiempo se incrementa en *1* segundo. En la columna de la derecha se observa la velocidad correspondiente a cada valor del tiempo.

Tabla 2.1

t=0	v = 0
t=1s	v= 2m/s
t=2s	v= 4m/s
t=3s	v = 6m/s
t=4s	v = 8m/s
t=5s	v = 10m/s
t=6s	v = 12m/s
t=7s	v = 14m/s
t=8s	v = 16m/s
t=9s	v = 18m/s

Observe que cada vez que transcurre un segundo la rapidez aumenta *2m/s*. Este valor es lo que se denomina aceleración

Si la aceleración de un cuerpo es de 3 m/s^2, significa que cada segundo el cuerpo incrementa su rapidez en 3 *m/s*.

Como ejercicio, realice una tabla para el caso en que la aceleración sea de 3 m/s^2 y que el móvil parte del reposo. Considere intervalos de tiempo de *1s* en forma similar al ejemplo anterior.

En todos estos casos se ha visto que la rapidez inicial de la partícula ha sido cero, ¿pero cómo cambiaría nuestra tabla si la velocidad de la partícula fuera diferente de cero, por decir, rapidez inicial = *1 m/s*? Suponga que la aceleración es $2\,{}^{m}/_{s^2}$. (ver tabla 2.2)

Tabla2.2

t=0	v=0m/s **+1m/s**=1m/s
t=1s	v=2m/s **+1m/s**=3m/s
t=2s	v=4m/s **+1m/s**=5m/s
t=3s	v=6m/s **+1m/s**=7m/s
t=4s	v=8m/s **+1m/s**=9m/s
t=5s	v=10m/s**+1m/s**=11m/s
t=6s	v=12m/s**+1m/s**=13m/s
t=7s	v=14m/s**+1m/s**=15m/s
t=8s	v=16m/s**+1m/s**=17m/s
t=9s	v=18m/s**+1m/s**=19m/s

Observe que cada vez que transcurre un segundo la rapidez aumenta *2m/s*. Sin embargo se debe aumentar el valor de la rapidez inicial que es de 1

Volviendo a la ecuación que define la aceleración:

$$\bar{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} \qquad (3.9)$$

donde $t_f - t_i$ es el intervalo de tiempo en el que ocurre el cambio de velocidad

Si la aceleración es constante, entonces $\bar{a} \approx a$

Así, $a = \frac{v_f - v_i}{t}$ *(3.10)*

Despejando v_f se obtiene:

$v_f = v_i + at$ *(3.11)*

donde, v_f *es la velocidad final* después de que han transcurrido t segundos.

v_i *es la velocidad inicial*

a es la aceleración y

t es el intervalo de tiempo.

Como la aceleración es constante se puede escribir la velocidad media como:

$$\bar{v} = \frac{v_i + v_f}{2} \qquad (3.12)$$

$$x = \bar{v}t \qquad x = \left(\frac{v_i + v_f}{2}\right) \times t \qquad (3.13)$$

La ecuaciones (3.12) y (3.13) son válidas sólo si la aceleración es constante.

Ejemplo 3.6

Un carro de carrera parte con una velocidad inicial de 15 *m/s* y acelera constantemente a razón de 3.0 m/s^2. Calcule su desplazamiento después de 10.0 *segundos*.

Solución:

Usando la ecuación (3.11) se tiene:

$$v_f = v_i + at = 15\frac{m}{s} + 3.0\frac{m}{s^2} \times 10.0s \qquad v_f = 45.0\frac{m}{s}$$

Usando la ecuación (3.12):

$$\bar{v} = \frac{v_i + v_f}{2} = \frac{15\frac{m}{s} + 45.0\frac{m}{s}}{2}; \qquad \bar{v} = 30.0\,{}^{m}/_{s}$$

Usando la ecuación (3.13);

$$x = \bar{v}t = 30.0\frac{m}{s} \times 10.0s; \quad x = 300.0m$$

En estas ecuaciones x es el desplazamiento pues consideramos que la partícula, en el instante $t = 0$, se encuentra en el origen.

Ejemplo 3.7

Un carro que parte con una velocidad inicial de 10.0 *m/s* acelera a razón de 2.0 m/s^2 durante 10.0 *segundos*. Calcule su desplazamiento.

Solución:

Este ejemplo es muy parecido al anterior y el método que se usó consistió en calcular la velocidad final con la ecuación (3.11) y luego calcular el desplazamiento con la ecuación (3.13)

$$v_f = v_0 + at = 10.0\frac{m}{s} + 2.0\frac{m}{s^2} \times 10.0s \qquad v_f = 30\,{}^{m}/_{s}$$

$$x = \frac{v_0 + v_f}{2} \times t = \frac{(10 + 30)\frac{m}{s}}{2s} \times 10s \qquad x = 200m$$

Ahora vamos a resolver para x en forma literal y luego hallar una fórmula para calcular el desplazamiento.

Primero usamos la ecuación (3.11) $v_f = v_i + at$ y luego la ecuación (3.13) $x = \frac{v_0+v_f}{2} \times t$

Remplazando la ecuación (3.11) en la (3.13)

$$x = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + at)t = \frac{1}{2}(2v_0t + at^2)$$

$$x = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3.14)$$

En esta ecuación, x es el desplazamiento, v_0 la velocidad inicial, a la aceleración (constante) y t el intervalo de tiempo.

Ejemplo 3.8

Un avión parte del reposo y acelera constantemente a razón de 25.0 m/s^2, ¿cuál es su desplazamiento después de 10.0 s?

Solución:

Usando la ecuación (3.11)

$$v_f = v_0 + at \qquad v_f = 0 + 25.0\frac{m}{s^2} \times 10.0s \qquad v_f = 250\frac{m}{s}$$

Usando la ecuación (3.13): $x = \left(\frac{v_i+v_f}{2}\right)t = \left(\frac{250}{2}\right)10s \quad x = 1250m$

Usando la ecuación (3.14) se puede llegar al mismo resultado anterior.

$$x = 0 + \frac{1}{2}\left(25.0\frac{m}{s^2}\right)(10.0s)^2 = 1250m$$

Ejemplo 3.9

Un objeto se mueve con rapidez constante de 3 *m/s* durante 5 *segundos*, ¿Cuál es la distancia recorrida?

Solución:

Este es un ejemplo en que un objeto se mueve con rapidez constante,. Calcule el espacio recorrido durante 5 s si su velocidad es de $3^m/_s$

$$x = vt \qquad x = 3\frac{m}{s} \times 5s \qquad x = 15m$$

Ejemplo 3.10

Una partícula recorre 1200 metros en 10 minutos con rapidez constante, ¿Cuál es su velocidad en m/s?

Solución:

De la fórmula $x = vt$ se debe despejar la velocidad, sin embargo los minutos debemos transformarlos a segundos.

$$10min \times \frac{60s}{1min} = 600s \qquad v = \frac{x}{t} = \frac{1200}{600} = 2.0\,{}^{m}/_{s}$$

Ejemplo 3.11

En el fondo de un pozo de 680 *metros* de profundidad ocurre una explosión, ¿en cuántos *segundos* usted escuchará el estruendo conociendo que el sonido viaja en el aire con velocidad constante de 340 *m/s*?

Solución:

Se debe aplicar la ecuación del movimiento rectilíneo uniforme $x = vt$

$$x = vt \quad t = \frac{x}{v} = \frac{680m}{340\,{}^{m}/_{s}} \qquad t = 2.0s$$

Ejemplo 3.12

Una partícula pasa por el origen y se mueve con aceleración constante a lo largo de una línea recta, hacia la derecha. Después de recorrer durante *2 s*, pasa por el punto *A* con una rapidez de *10m/s* y *100m* después pasa por el punto *B* con una rapidez de *30 m/s*.

a) Calcule su velocidad inicial.
b) Calcule el tiempo en que la partícula viaja de *A* a *B*

Solución:

a) Primeramente se debe calcular la aceleración de la partícula con los datos que se tienen entre los puntos *A* y *B*. (Ver figura 3.3)

$$v_B{}^2 = v_A{}^2 + 2ax$$

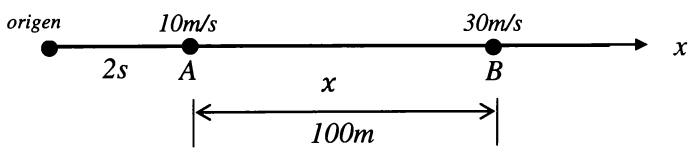


Figura 3.3

De la ecuación anterior se despeja la aceleración *a*:

$$a = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2x} = \frac{\left(30\frac{m}{s}\right)^2 - \left(10\frac{m}{s}\right)^2}{2\times 100m} \qquad a = 4.0\,{}^{m}/_{s^2}$$

Usamos la ecuación (3.11):

$$v_f = v_o + at \quad Ahora,\ v_f = v_A\ y\ despejando\ v_0\ se\ obtiene:$$

$$v_0 = v_A - at = 10\frac{m}{s} - 4.0\frac{m}{s^2} \times 2s \qquad v_0 = 2.0\,{}^{m}/_{s}$$

b) Para calcular el tiempo entre A y B, usamos la ecuación (3.11).

$$v_f = v_0 + at \qquad donde\ v_f = v_B\ y\ \ v_0 = v_A$$

$$v_B = v_A + at; \qquad t = \frac{v_B - v_A}{a} = \frac{30\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s}}{4.0\frac{m}{s^2}} \qquad t = 5.0s$$

Ejemplo 3.13

Una motocicleta ***A*** arranca desde el reposo en el mismo instante que otra motocicleta ***B*** la rebasa con una rapidez constante de ***20m/s***. Si la motocicleta *A* mantiene una aceleración constante de ***2 m/s^2***, calcule:

a) El tiempo en que la motocicleta ***A*** rebasa a la motocicleta ***B***.
b) La velocidad de la motocicleta ***A*** al momento en que alcanza a la otra.

Solución:

a) El desplazamiento de la motocicleta ***A*** es:

$$x = \tfrac{1}{2}a_A t^2$$

El desplazamiento de la motocicleta ***B*** es:

$$x = v_B t$$

Cuando la motocicleta ***A*** alcanza a la motocicleta ***B*** es cuando sus desplazamientos son iguales, por lo tanto, igualando las ecuaciones anteriores:

$$v_B t = \frac{1}{2}a_A t^2 \qquad t = \frac{2v_B}{a_A} = \frac{2\left(20\frac{m}{s}\right)}{2\frac{m}{s^2}} \qquad t = 20s$$

b) La velocidad de la motocicleta ***A*** está dada por:

$$v_A = v_0 + at \qquad donde\ v_0 = 0\ ya\ que\ parte\ del\ reposo.$$

$$v_A = 2\frac{m}{s^2} \times 20s \qquad v_A = 40\,{}^{m}/_{s}$$

Se debe observar que en el momento en que la motocicleta ***A*** alcanza a la motocicleta ***B*** sus rapideces no son iguales. De hecho, a partir del momento en que la moto ***A*** alcanza a la ***B***, la primera se adelantará debido a que mantiene aceleración, en tanto que la ***B*** seguirá moviéndose con rapidez constante.

Ejemplo 3.14
Un pasajero llega a la estación de autobuses 4 *segundos* después de la salida del bus el cual acelera a razón de 0.5 m/s^2. ¿A qué rapidez constante debería correr el pasajero para alcanzar al autobús? ¿Será posible que pueda imprimir tal rapidez?

Solución:
Suponer que el tiempo que el bus se mantiene en movimiento hasta ser alcanzado por el pasajero es t, por lo tanto, el desplazamiento del autobús será:

$$x = \frac{1}{2}at^2$$

El desplazamiento del pasajero debe ser igual al desplazamiento del bus, por lo tanto:

$$x = v_p(t-4)$$

donde $v_p$representa la rapidez constante del pasajero y $(t-4)$ es tiempo que tiene el pasajero para alcanzar al bus.

Igualando los desplazamientos:

$$\frac{1}{2}at^2 = v_p(t-4)$$

$$2v_pt - 8v_p = 0.5t^2 \qquad t^2 - 4v_pt + 16v_p = 0$$

$$t = \frac{4v_p \pm \sqrt{(4v_p)^2 - 4\times 16v_p}}{2} \qquad 16v_P^2 - 4 \times 16v_P = 0$$

Despejando v_p:

$$v_p = 4\frac{m}{s}$$

ACTIVIDAD 3.1

Suponga que un carro que está acelerando alcanza a otro que se estaba moviendo a velocidad constante. En el momento que le da alcance, ¿cuál de los dos carros tiene mayor velocidad? Explique.

ACTIVIDAD 3.2

Suponga que se lanzan sobre una superficie horizontal dos objetos de masas m_1 y m_2, con la misma velocidad inicial. Indique ¿cuál de los dos objetos llega más lejos suponiendo que $m_1 > m_2$?

ACTIVIDAD 3.3

¿Es posible que un objeto que parte con una velocidad positiva y con una aceleración constante negativa pueda regresar al punto de partida después de cierto tiempo. Explique.

ACTIVIDAD 3.4

Si un objeto recorre una distancia d_1 cuando se mueve con aceleración constante a_1 durante t_1 segundos. ¿Qué distancia se moverá un segundo objeto cuya aceleración a_2 sea la mitad que a_1 pero que el tiempo t_2 sea cuatro veces mayor que t_1? Suponga que ambos objetos parten con velocidad inicial cero.

a) Igual que d_1.
b) El doble que d_1.
c) Cuatro veces más que d_1.
d) Seis veces más que d_1.
e) Ocho veces más que d_1.

ACTIVIDAD 3.5

En una competencia de patinaje artístico una niña da vueltas circulares alrededor de un centro con rapidez constante. ¿Se puede afirmar que la niña se mueve con aceleración diferente de cero?

3.6 CAIDA LIBRE

Caída libre es un caso especial del movimiento rectilíneo uniformemente variado. La única diferencia es que se debe cambiar la aceleración a por g cuyo valor es 9.8 m/s^2. En este texto usaremos $g = 10\ {}^{m}/_{s^2}$.

Cuando se habla de caída libre, se dice que es la caída de los cuerpos en los que no se considera la resistencia del aire. En este texto se considerarán casos en los que no se

toma en cuenta la resistencia del aire a menos que se lo diga expresamente en el problema.

Un caso que es importante anotar es el hecho de que dos cuerpos que tienen diferente masa y que son soltados desde la misma altura toman el mismo tiempo en llegar al suelo. Es decir, los cuerpos caen a la superficie de la Tierra con la misma aceleración sin importar la masa del objeto que se suelta.

Cuando un cuerpo es lanzado hacia arriba y, como en todos los casos, no se considera la resistencia del aire, cuando vuelve al suelo llega con la misma rapidez con la que fue lanzado.

En las ecuaciones de caída libre, se debe entender que la variable "*y*" significa *desplazamiento* y no distancia recorrida. Además, tomando en consideración el eje cartesiano como positivo hacia arriba y negativo hacia abajo, y tomando en cuenta que la aceleración de la gravedad está dirigida hacia abajo, siempre se considerará a la aceleración de la gravedad *-10m/s*^{2}.

Ecuaciones del m.r.u.v.	**Ecuaciones de caída libre**	
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$	(3.15)
$v_f^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$	(3.16)
$v_f = v_0 + at$	$v_y = v_{0y} - gt$	(3.17)

Ejemplo 3.15

Una piedra es lanzada directamente hacia arriba, desde el nivel del suelo, con una rapidez inicial de 20 *m/s*. Calcule:

a) El tiempo en que alcanza su altura máxima.
b) La altura máxima
c) La rapidez con que regresa al suelo
d) La rapidez cuando se encuentra a 10.2 *m* del suelo mientras la piedra sube o mientras baja.
e) Compruebe que la velocidad de la partícula es cero en el punto de altura máxima.

Solución:

La cantidad 20 *m/s* representa la velocidad inicial. Esta velocidad es positiva porque está dirigida hacia arriba.

La piedra alcanza su altura máxima cuando su velocidad en *y* es cero (v_y=*0*). Por lo tanto, de la ecuación (3.17):

a) $v_y = v_{0y} - gt \qquad 0 = v_{0y} - gt \qquad t = \frac{v_{0y}}{g}$

$$t = \frac{20\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s^2}} \qquad t = 2.0s$$

b) Cuando la piedra llega a su altura máxima, $v_y = 0$

La cantidad y_0 representa la posición inicial, y si la referencia es la superficie de la Tierra, entonces $y_0 = 0$.

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0); \qquad v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy$$

$$y_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}; \qquad y_{max} = \frac{\left(20\frac{m}{s}\right)^2}{2 \times 10\frac{m}{s^2}}; \qquad y_{max} = 20.0m$$

c) Cuando la piedra regresa al suelo, entonces $y = 0$ y como la posición inicial también es cero ($y_0 = 0$), usando la ecuación (3.17): y considerando que el tiempo es dos veces el tiempo de subida:

$$v_y = v_{0y} - gt; \qquad v_y = 20\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \times (4.0s);$$

$$v_y = -20\frac{m}{s}$$

Observe que la rapidez inicial es de +20 m/s. Es decir, en planos horizontales la velocidad de la partícula tiene la misma magnitud, la diferencia sólo es en el signo. Esto se puede entender ya que el valor positivo de la velocidad es cuando la partícula sube y aquella con signo negativo es cuando la partícula baja.

d) Se procede a calcular la rapidez de la partícula cuando se encuentre a 10.2 *metros* del suelo cuando está subiendo. Cuando la partícula está bajando y se encuentra a 10.2 *metros* del suelo su velocidad tendrá el mismo valor que cuando estaba subiendo pero con signo negativo.

Usando la ecuación (3.16)

$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$ *donde* y_0=0 que es la posición inicial.

$$v_y = \pm\sqrt{v_{0y}^2 - 2gy}; \qquad v_y = \pm\sqrt{\left(20\frac{m}{s}\right)^2 - 2\left(10\frac{m}{s^2}\right)10.2m}$$

$$v_y = \sqrt{196}\,m/s; \qquad v_y = \pm 14.0\frac{m}{s}$$

El signo positivo indica que la partícula está subiendo y que su rapidez es +14.0 *m/s*. El signo negativo indica que la partícula está bajando y que su rapidez es -14.0 *m/s*. En ambos casos la partícula se halla a 10.2 *metros* sobre la superficie de la Tierra.

e) Se puede probar que $v_y = 0$ usando el tiempo que le tomó a la partícula en alcanzar su altura máxima.

Usando la ecuación (3.17) $v_y = v_{0y} - gt$ donde t es el tiempo de subida que en este caso es 2.0*s*, procedemos a remplazar estos datos.

$$v_y = 20\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \times 2.0s \qquad v_y = 0$$

Ejemplo 3.16

Desde lo alto de un edificio se lanza una piedra directamente hacia arriba con una velocidad inicial de $20.0\,{}^{m}/_{s}$. Si el tiempo en que la piedra llega al suelo es de 6.0*s*, calcule:

a) La altura máxima.
b) El tiempo hasta que alcanza su altura máxima
c) La altura del edificio.

Solución:

a) La altura máxima ocurre cuando la velocidad en ese punto es igual a cero. Es decir, cuando $v_y = 0$

Usando: $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy$

$$y_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

$$y_{max} = \frac{\left(20.0\,{}^{m}/_{s}\right)^2}{2 \times 10\,{}^{m}/_{s^2}}; \qquad y_{max} = 20.0m$$

b) El tiempo hasta que alcanza su altura máxima ocurre cuando $v_y = 0$

Usando la ecuación: $v_y = v_{0y} - gt$

$$t_{sub} = \frac{v_{0y}}{g}; \qquad t_{sub} = \frac{20.0\,{}^{m}/_{s}}{10\,{}^{m}/_{s^2}}; \qquad t_{sub} = 2.0s$$

c) Para calcular la altura del edificio, se debe calcular *"y"* cuando el tiempo es 6.0 *s*. Ya que ese valor de *"y"* es el desplazamiento, que es el vector que va desde el

punto donde fue lanzada la piedra hasta el suelo, y esa es justamente la altura del edificio,

usando la ecuación: $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

$$y = 20.0\frac{m}{s} \times 6.0s - \frac{1}{2} \times 10\frac{m}{s^2} \times (6.0s)^2; \qquad y = -60.0m$$

Por lo tanto, la altura del edificio será: +60.0m.

Ejemplo 3.17

Desde lo alto de un edificio se lanza una piedra directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 30.0 *m/s*, y después de 4 *segundos* se deja caer una segunda piedra desde el mismo lugar donde se lanzó la primera. Calcule el tiempo en que la primera piedra alcanza a la segunda.

Solución:

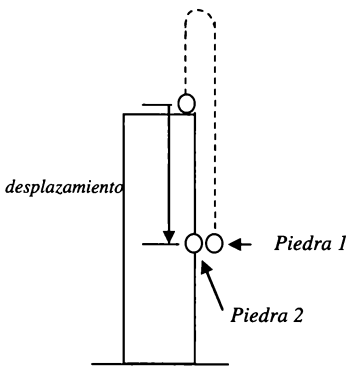


Figura 3.4

Se observa que en el momento que la primera piedra alcanza a la segunda, sus desplazamientos son iguales. Por lo tanto:

$$y_1 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \textit{desplazamiento de la piedra } 1,$$
$$\textit{donde } t \textit{ representa el tiempo de la piedra } 1.$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}g(t-4)^2 \quad \textit{desplazamiento de la piedra } 2.$$

Como los dos desplazamientos son iguales, $y_1 = y_2$

$$v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}g(t-4)^2$$

$$v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}gt^2 + 4gt - 8g$$

$$v_{0y}t = 4gt - 8g \qquad t = \frac{8g}{4g - v_{oy}} \qquad t = \frac{8\left(10\frac{m}{s^2}\right)}{4\left(10\frac{m}{s^2}\right) - 30.0\frac{m}{s}}$$

$$t = 8.0s$$

Ejemplo 3.18

Desde un acantilado de 100 metros de altura se deja caer una piedra P_1 mientras que desde el fondo del acantilado y al mismo tiempo se lanza una piedra P_2 con una rapidez de 50 *m/s* dirigida hacia arriba, como se muestra en la figura 3.5. Cuando las piedras se cruzan están viajando en direcciones opuestas. Calcule la altura, medida desde el fondo del acantilado, en la que las piedras se cruzan.

Solución:

Se escoge el fondo del acantilado como el nivel de referencia. Por lo tanto, al inicio, la piedra P_1 se encuentra a *100m* arriba del nivel de referencia.

La posición inicial de la piedra P_1 es: y_{01} = *100m.*

La posición inicial de la piedra P_2 es: $y_{02} = 0$

Aquí se está considerando que el eje de referencia se encuentra en el fondo del acantilado.

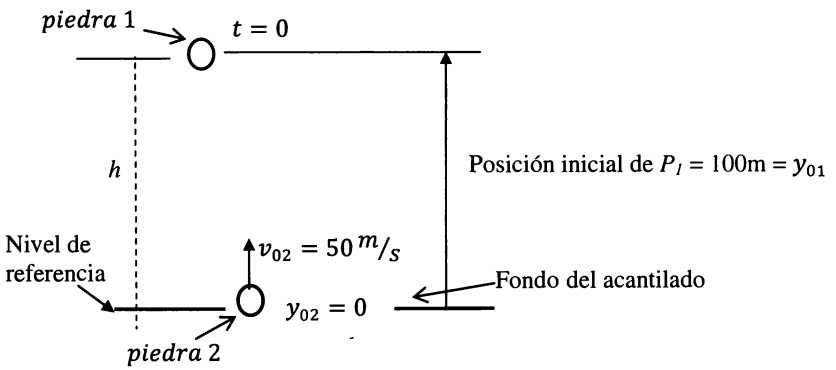


Figura 3.5

Aplicando la ecuación: $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ a las dos piedras, se tiene que:

Piedra P_1 : $y_1 = y_{01} - \frac{1}{2}gt^2$

Piedra P_2 : $y_2 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

Cuando las piedras se cruzan. $y_1 = y_2$ Por lo tanto:

$$y_{01} - \frac{1}{2}gt^2 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad t = \frac{y_{01}}{v_{0y}} = \frac{100m}{50\,m/s} = 2s$$

Es decir, después de $2s$ de haberse iniciado el movimiento, las dos piedras se cruzan.

P_2 ha subido: $y_2 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 50\frac{m}{s}(2s) - \frac{1}{2}\left(10\frac{m}{s^2}\right)(2s)^2 = 80.0m$

Y podemos comprobar que en el tiempo de $2s$, P_1 debe haber bajado 20.0 m.

La distancia que cae la piedra P_1 es: $\frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 10\frac{m}{s^2} \times (2.0s)^2 = 20.0\ m$

ACTIVIDAD 3.6

Desde Una altura h se sueltan dos objetos de masas diferentes. ¿Cuál de los dos objetos llega primero al suelo? ¿El más pesado, el más liviano, o ambos llegan al mismo tiempo?

ACTIVIDAD 3.7

Suponga que se lanza hacia arriba dos objetos de masas m_1 y m_2, con la misma velocidad inicial. Indique ¿cuál de los dos objetos llega más alto suponiendo que $m_1 > m_2$?

ACTIVIDAD 3.8

Suponga que usted está viajando en un globo que se está moviendo verticalmente hacia arriba con rapidez constante. Cuando el globo se encuentra a una cierta altura con respecto a la Tierra usted lanza un objeto verticalmente hacia arriba. El tiempo en que el objeto regresa a su mano será:

a) El mismo que si lo hubiera lanzado en el laboratorio.
b) Menor que si lo hubiera lanzado en el laboratorio.
c) Mayor que si lo hubiera lanzado en el laboratorio.
d) El tiempo depende de la velocidad del globo.
e) Falta información para responder a esta pregunta.

ACTIVIDAD 3.9

Si usted lanza una piedra verticalmente hacia arriba, ¿cuál es el valor de la aceleración de la piedra cuando llega a su altura máxima? (en el punto donde la velocidad se hace cero)

3.7 GRÁFICOS EN LA FÍSICA

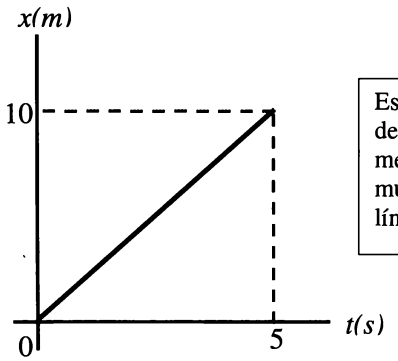
Cuando una partícula se mueve en una dirección (movimiento unidimensional) es muchas veces conveniente resolver el problema mediante el uso de gráficos.

Se debe entender que en el gráfico sólo se representa el movimiento de la partícula a lo largo de una línea recta ya sea en una dirección o en la dirección opuesta. Por ejemplo, si la partícula se mueve sobre el eje de las x su movimiento puede ser hacia la derecha o hacia la izquierda. Así como se puede mover la partícula a lo largo del eje de las x, también puede hacerlo a lo largo del eje de las y o a lo largo de cualquier línea recta.

3.8 GRÁFICO POSICIÓN VS. TIEMPO

A este gráfico se lo denomina usualmente: gráfico x-t. La posición está representada a lo largo de un eje vertical y en la abscisa se representa el tiempo. El gráfico $x\ vs.\ t$ muestra cómo la posición de la partícula varía con el tiempo. En todo momento la partícula se mueve en línea recta.

PARTÍCULA QUE PARTE DEL ORIGEN Y SE MUEVE CON VELOCIDAD CONSTANTE



Este gráfico indica que la partícula sale del origen (punto 0), y que recorre 10 metros en 5 segundos. Se sabe que se mueve con rapidez constante porque la línea inclinada es una línea recta.

Figura 3.6

La pendiente de la recta inclinada nos da el valor de la velocidad y como es una pendiente positiva, indica que la velocidad es positiva.

En el gráfico de la figura 3.6, la pendiente es igual a 2 m/s. Es decir , la partícula se mueve en línea recta durante 5 segundos con una velocidad de 2 m/s, y en ese tiempo recorre 10 metros.

En el gráfico de la figura 3.7, se muestra el movimiento de una partícula en línea recta cuya velocidad es negativa. Se observa que la partícula también parte del origen y que recorre 10 metros en los primeros 5 segundos. Debe notarse que se mueve hacia la izquierda del origen. Por lo tanto, debido a que la partícula se mueve hacia el lado negativo (hacia la izquierda), su velocidad es negativa.

Además, la pendiente de la gráfica de la figura 3.7 es negativa lo que implica que la velocidad es negativa. Debe entenderse como negativa que se mueve hacia la izquierda.

Aunque la partícula se encuentre en la zona positiva, por el hecho de moverse hacia la izquierda su velocidad es negativa.

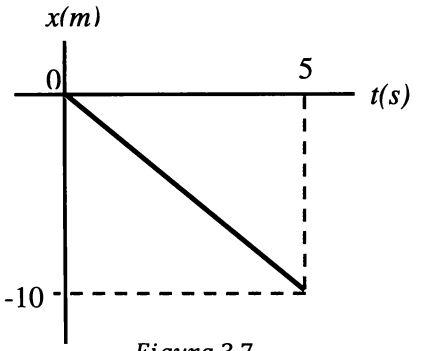


Figura 3.7

INTERPRETACIÓN DEL GRÁFICO DE LA FIGURA 3.7

En la figura 3.8, se muestra el eje *x*, el origen 0 y la flecha roja que indica la dirección del movimiento de la partícula. Observe que la partícula parte del origen y se mueve hacia la izquierda del eje de las *x*. En este caso la pendiente, que es la velocidad, tiene un valor de -2 *m/s*.

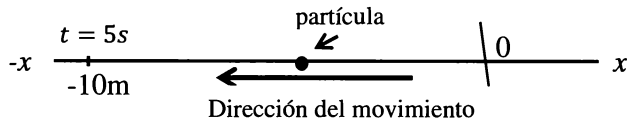


Figura 3.8

Ejemplo 3.19

Interprete el gráfico mostrado a continuación.

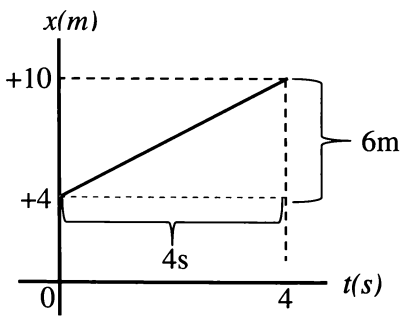


Figura 3.9

En este caso la partícula parte a 4 metros hacia la derecha del origen y se mueve en línea recta durante 4s. Cuando llega a los 4 segundos, la partícula se encuentra a 10 metros del origen. Es decir que tuvo un desplazamiento de 6 metros durante un tiempo de 4 segundos. Observe que su velocidad es positiva y constante. La pendiente de esta recta nos da el valor de la velocidad.

CALCULO DE LA PENDIENTE DE LA RECTA.

$$pendiente = \frac{cateto\ vertical}{cateto\ horizontal} = \frac{6m}{4s} = 1.5\,{}^{m}/_{s}$$

La velocidad de la partícula tiene un valor de 1.5 *m/s*.

A partir del gráfico anterior, calcule la velocidad media de la partícula. Si la partícula inicia su movimiento en $x = 4m$ y se mueve hasta $x = 10m$, su desplazamiento es $\Delta x = +6m$, en un intervalo de tiempo de 4 segundos.

$\vec{v}_m = \frac{desplazamiento}{intervalo\ de\ tiempo} = \frac{+6m}{4s} = +1.5\,{}^{m}/_{s}$ hacia la derecha.

Se observa que cuando una partícula se mueve con velocidad constante, su velocidad tiene la misma magnitud y dirección que su velocidad media. Esto siempre es válido si la partícula se mueve en una sola dirección.

Ejemplo 3.20

Para el gráfico de la figura 3.10, calcule la *velocidad* de la partícula para $t = 3s$, su *velocidad media* para todo el recorrido y el valor del *tiempo* cuando pasa por el origen.

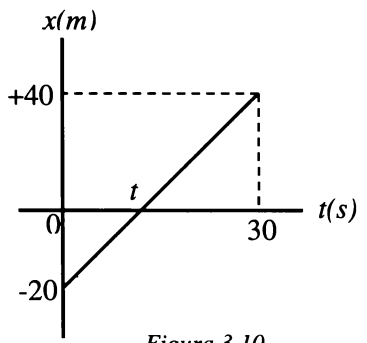


Figura 3.10

La partícula inicia su movimiento a 20 metros atrás del origen. Luego continua su movimiento con velocidad constante, pasa por el origen y continúa hasta llegar a 40 metros delante del origen. Todo el movimiento lo realiza durante 30 segundos.

Solución:

Como el movimiento es con velocidad constante, entonces la velocidad de la partícula es igual a la velocidad media. La velocidad se la encuentra calculando la pendiente de la recta.

$$v = \frac{40m - (-20m)}{30s} = 2\,{}^{m}/_{s}; \qquad v_m = 2\,{}^{m}/_{s}$$

La velocidad de la partícula para $t = 3s$ es de 2 *m/s*. De hecho, la velocidad para cualquier tiempo entre 0 y 30 *s* es de 2 *m/s*.

Para calcular el valor de t (para el cual la partícula pasa por el origen) se realiza una relación de triángulos semejantes.

$$\frac{40}{30-t}=\frac{20}{t} \qquad 40t = 600 - 20t$$

Resolviendo para t: $t = 10s.$

Para t = *10s* la partícula pasa por el origen y continúa moviéndose en la misma dirección. Bajo ningún concepto, la partícula cambia la dirección del movimiento.

Ejemplo 3.21

El gráfico mostrado representa el movimiento de una partícula en línea recta.

a) Calcule la velocidad entre 0 y 5 segundos.
b) Calcule la velocidad para $t = 6s$
c) Calcule el tiempo t cuando la partícula pasa por el origen.
d) Calcule la velocidad media de la partícula para todo el recorrido
e) Calcule la velocidad para el intervalo entre *20* y *30s*.

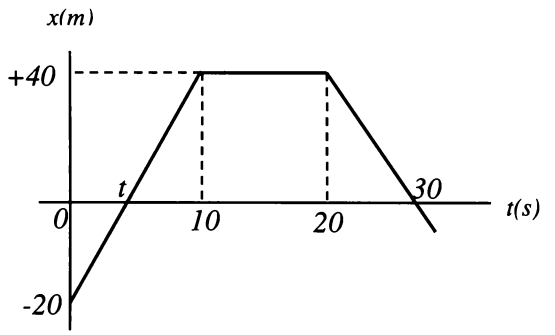


Figura 3.11

Solución:

a) La velocidad de la partícula entre 0 y 5s es la misma que entre 0 y 10s.

$$v = \frac{40m - (-20m)}{10s} = 6\,{}^{m}/_{s}$$

b) Para $t = 6s$ es la misma que para el intervalo de *0* a *10s* y eso es *6m/s*
c) Relacionando triángulos equivalentes:

$$\frac{60}{10}=\frac{20}{t} \qquad t = 3.3s$$

d) Se observa que el desplazamiento entre *0* y *30 s* es *+20m.* Por lo tanto:

$$v_m = \frac{+20m}{30s} = 6.7\,{}^{m}/_{s}$$

e) La pendiente está dada por: $v = \frac{(0-40)m}{10s} = -4\,{}^{m}/_{s}$

Ejemplo 3.22

El gráfico de la figura 3.12, representa el movimiento de una partícula en línea recta. Calcular:

a) El valor de x para $t = 20\ s$
b) La velocidad de la partícula para $t = 17.5s$
c) La posición de la partícula para $t = 16s$
d) El desplazamiento entre 10 y 60s
e) La velocidad media en el intervalo entre *20* y *50s*
f) El desplazamiento entre *0 y* 60s
g) La distancia total recorrida durante todo el intervalo de tiempo
h) La rapidez media en el intervalo entre *10* y *50s*
i) Las veces que la partícula pasa por el origen y el valor de esos tiempos.

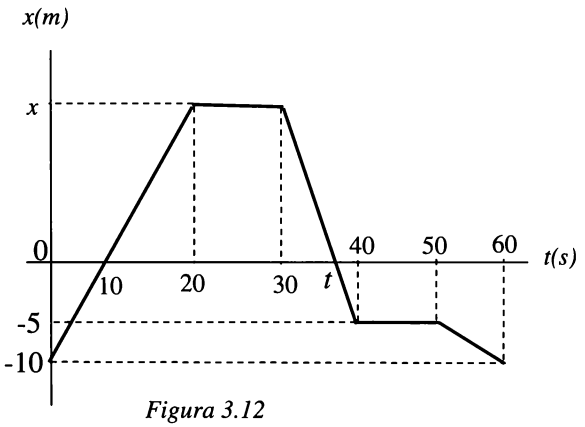


Figura 3.12

Solución:

(a)Para calcular el valor de x realizamos las relaciones entre triángulos semejantes

$$\frac{x+10}{20} = \frac{10}{10} \quad \textit{Resolviendo para } x: \qquad x = 10m$$

(b) La velocidad de la partícula es la misma entre 0 *y* 20 *s, por lo tanto la velocidad para* 17.5 *s es:* $v = \frac{10m-(-10m)}{20s} = 1\ ^{m}/_{s}$ *que es la pendiente de la recta.*

(c) Mediante triángulos semejantes:

$\frac{10}{10} = \frac{x}{6} \quad x = 6m$

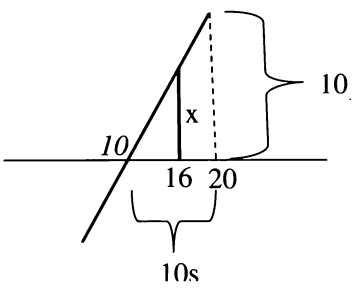


Figura 3.13

(d) Del gráfico se observa que el desplazamiento entre 10 y 60s es: -10m

(e)El desplazamiento entre 20 y 50s es de -15m, por lo tanto la velocidad media será:

$$v_m = \frac{desplazamiento}{tiempo} = \frac{-15m}{50s-20s} = -0.5\,{}^{m}/_{s}$$

(f)Del gráfico se observa que el desplazamiento es cero

(g) Observando detenidamente el gráfico, la distancia recorrida es igual a 40m

(h) La distancia recorrida durante 10 y 50 s es igual a 25m, por lo tanto la rapidez media en ese intervalo de tiempo es:

$$rapidez\ media = \frac{distancia\ recorrida}{intervalo\ de\ tiempo} = \frac{25m}{40s} = 0.625\,{}^{m}/_{s}$$

(i) La partícula pasa por el origen dos veces, la primera cuando t = 10s y la segunda de acuerdo a la relación de triángulos equivalentes

$$\frac{10}{t-30} = \frac{5}{40-t} \quad resolviendo\ para\ t: \quad t = 36.7s$$

Ejemplo 3.23

La partícula *A* se mueve a una velocidad de 8 *m/s* mientras que la partícula *B* a *-6m/s* . Ambas partículas se mueven en línea recta. En el gráfico de la figura 3.14 se observa que las partículas se cruzan cuando *t = 10s*. Calcule la distancia entre las partículas cuando el tiempo es igual a cero.

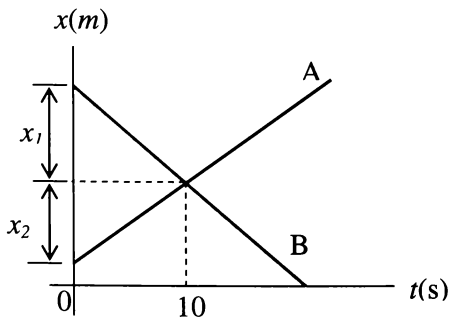


Figura 3.14

En este ejemplo se pide calcular la distancia $x_1 + x_2$ y esto lo podemos hallar usando la pendiente de las dos rectas A y B

$$pendiente\ A = 8\frac{m}{s} = \frac{x_2}{10}; \quad x_2 = 80m$$

$$pendiente\ B = 6\frac{m}{s} = \frac{x_1}{10}; \quad x_1 = 60m$$

Distancia entre las partículas = *140 m a t=0.*

Otra forma de resolver el ejemplo 3.23 es colocando, sobre una línea recta, las partículas A y B a una distancia de $x_1 + x_2$ entre ellas como se muestra en la figura 3.15.

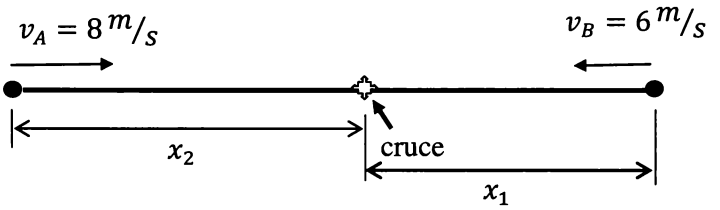


Figura 3.15

Aplicando las ecuaciones de cinemática:

$$x_2 = v_A t = 8\frac{m}{s} \times 10s = 80m$$

$x_1 = v_B t = 6\frac{m}{s} \times 10s = 60m$ $\quad x_1 + x_2 = 140m$ a $t = 0$

Se observa que con ambos procedimientos se llega al mismo resultado.

3.9 GRÁFICO VELOCIDAD VS. TIEMPO

El movimiento de una partícula en línea recta puede obtenerse usando un gráfico velocidad vs. tiempo. En la ordenada se grafica la velocidad y en la abscisa el tiempo. En este tipo de gráfico la *pendiente de la curva representa la aceleración* y el *área bajo la curva el desplazamiento*. En el gráfico de la figura 3.16, una partícula parte con velocidad inicial v_0 para $t = 0$ y el movimiento es con aceleración constante. Se observa que para un tiempo posterior t, la partícula alcanza la velocidad v_f. Como la línea que representa este movimiento es una recta, indica que la aceleración es constante.

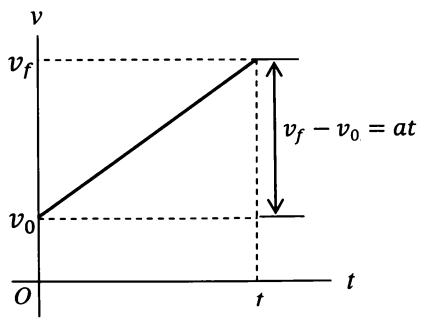


Figura 3.16

La pendiente de la curva v vs. t nos da la aceleración.

$$pendiente = a = \frac{v_f - v_0}{t}$$

El área bajo la curva nos da el desplazamiento:

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Ejemplo 3.24

El gráfico de la figura 3.17 representa el movimiento de una partícula en línea recta. Suponga que para $t = 0$ la partícula parte del origen y tiene una velocidad inicial de +30 m/s. Después de recorrer 10 segundos su velocidad es de -20 m/s Calcule:

a) la aceleración de la partícula.
b) el valor del tiempo en que la partícula cambia de dirección.
c) el desplazamiento y la distancia recorrida durante los 10 s.

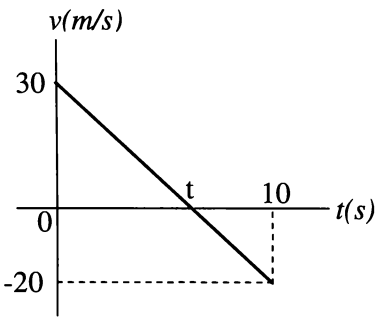


Figura 3.17

a) La aceleración es igual a la pendiente de la recta. $a = \frac{(-20-30)^{m}/_{s}}{10s} = -5\,{}^{m}/_{s^2}$

b) La partícula cambia de dirección para t segundos. Por relación de triángulos:

$$\frac{30}{t} = \frac{50}{10} \qquad t = 6s$$

c) El área bajo la curva es: $\frac{1}{2}30 \times 6m - \frac{1}{2}4 \times 20m = 50m$ = *desplazamiento.*
La distancia recorrida = $\frac{1}{2}30 \times 6m + \frac{1}{2}4 \times 20m = 130m$

En el gráfico de la figura 3.17, el desplazamiento se calcula midiendo el área bajo la curva considerando que, las áreas que están sobre el eje del tiempo son positivas y las que están debajo del eje del tiempo son negativas. Sin embargo, para calcular la distancia recorrida simplemente se suman todas las áreas sin considerar los signos de las áreas. La partícula parte en $t = 0$ con una velocidad inicial de *30 m/s* y empieza a

disminuir su velocidad llegando a cero después de *6s* y habiendo recorrido *90 m* (el área del triángulo superior). A partir de los *6s* la partícula adquiere una velocidad negativa por lo tanto, ésta regresa y este desplazamiento es negativo. Sin embargo la distancia recorrida es la suma de todos los desplazamientos sin importar el signo de los mismos.

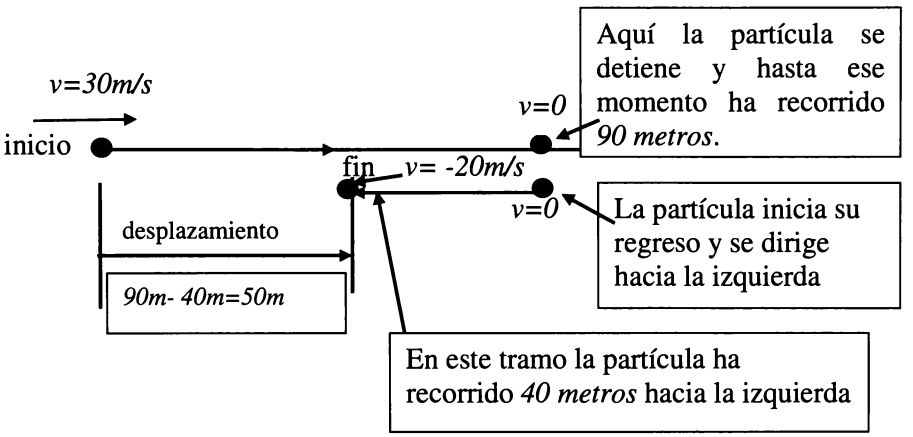


Figura 3.18

Se debe recordar que el desplazamiento es el vector que va desde el punto inicial hasta el punto final a donde llega la partícula. La distancia recorrida es la suma de todos los desplazamientos. En este caso es *90m+40m* lo que da un total de *130m.*

Ejemplo 3.25

En un diagrama *v* vs.*t* grafique el movimiento de un cuerpo en caída libre. El cuerpo se suelta desde una altura de 125.0*m* sobre el suelo.

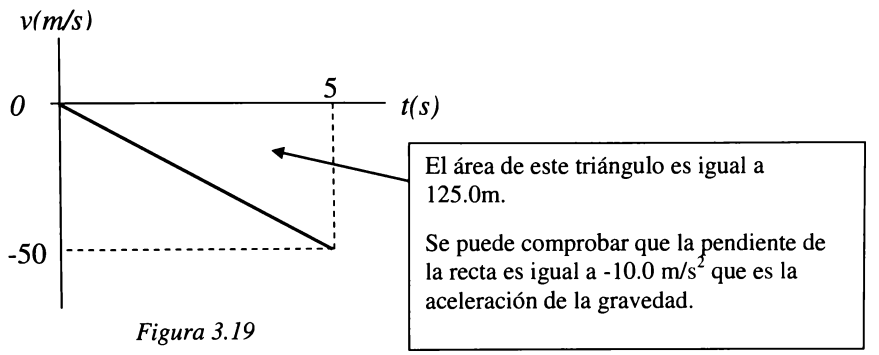


Figura 3.19

Ejemplo 3.26

Desde lo alto de un edificio se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con velocidad inicial de *20 m/s* llegando al suelo después de *6* segundos de haber sido lanzada. Calcule:

a) La altura del edificio
b) La distancia total recorrida por la piedra.

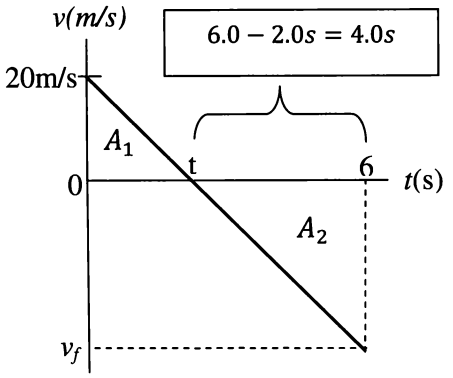


Figura 3.20

La altura del edificio es el desplazamiento de la piedra que está dado por la suma algebraica de las dos áreas (A_1 y A_2). Primero hallaremos el tiempo t .Debido a que la pendiente de la recta es la aceleración de la gravedad g:

$$10\,{}^{m}/_{s^2} = \frac{20\,{}^{m}/_{s}}{t} \qquad t = 2.0s$$

Por relación de triángulos equivalentes:

$$10 = \frac{v_f}{4.0}; \qquad v_f = -40.0\,{}^{m}/_{s}$$

La altura del edificio es igual a $A_1 + A_2$ considerando que el área A_2 es negativa.

$$\Delta x = \frac{1}{2}(2.0s)\left(20\frac{m}{s}\right) - \frac{1}{2}(4.0s)(40.0\,{}^{m}/_{s}) \qquad \Delta x = -60.0m$$

Por lo tanto, la altura del edificio es de $+\,60.0m$

La distancia recorrida por la piedra es $A_1 + A_2$ considerando que el área A_2 es positiva.

$$d = \frac{1}{2}(2.0s)\left(20\frac{m}{s}\right) + \frac{1}{2}(4.0s)(40.0\,{}^{m}/_{s}) \qquad d = 100.0m$$

Ahora estudiaremos un caso en el que es más fácil utilizar un gráfico para resolver un problema que usar el método analítico. Este problema ya fue resuelto usando el método gráfico (ejemplo 3.24), por lo tanto aquí utilizaremos el método analítico.

Ejemplo 3.27

Una partícula parte con una velocidad inicial de *+30 m/s* y después de *10s* su velocidad es de *-20 m/s*, manteniendo aceleración constante durante todo el trayecto. Calcule la distancia recorrida por la partícula.

Si la velocidad inicial es positiva, esto implica que la partícula se mueve hacia la derecha. Si luego su velocidad es negativa, implica que se mueve hacia la izquierda. Por lo tanto en algún momento la partícula cambió de dirección. Pero, para cambiar la dirección de su movimiento, su velocidad llegó a *cero*.

$$a = \frac{v_f - v_0}{t} = \frac{-20\,{}^{m}/_{s} - 30\,{}^{m}/_{s}}{10} \qquad a = -5\frac{m}{s^2}$$

$$tramo\ 1:\ v_f^2 = v_0^2 + 2ax_1 \qquad 0 = \left(30\frac{m}{s}\right)^2 + 2\left(-5\frac{m}{s^2}\right)x_{1;} \qquad x_1 = 90m$$

La partícula se movió hacia la derecha *90m*. Ahora se regresa desde el reposo. Su velocidad final es *-20m/s*.

$$tramo\ 2:\ v_f^2 = v_0^2 + 2ax_2;\ \ \left(-20\frac{m}{s}\right)^2 = 0 + 2\left(-5\frac{m}{s^2}\right)x_{2;} \qquad x_2 = -40m$$

El signo negativo es porque x_2, que es el desplazamiento del tramo 2, es negativo ya que la partícula se mueve hacia la izquierda. Por esa razón el signo del vector desplazamiento es negativo.

Para calcular la distancia total recorrida por la partícula debemos sumar los dos desplazamientos sin considerar el signo de x_2.

$$distancia\ recorrida: \qquad d = 90m + 40m = 130m$$

Si ahora deseamos calcular el desplazamiento de la partícula, debemos sumar x_1

y x_2 respetando el signo.

$$desplazamiento: \qquad \Delta x = 90m - 40m = 50m$$

Como la partícula regresó después de haber alcanzado su velocidad cero, se encuentra a 50 metros del origen.

Suponga que ahora se le pide que calcule el valor del tiempo para cuando la partícula se detiene.

$$\textit{Los datos serían:} \qquad v_0 = +30\,{}^{m}/_{s}; \qquad v_f = 0; \qquad a = -5\,{}^{m}/_{s^2}$$

$$v_f = v_0 + at$$

$$\textit{remplazando datos:}\ \ 0 = 30\,{}^{m}/_{s} + \left(-5\,{}^{m}/_{s^2}\right)t$$

$$\textit{despejando el tiempo:} \qquad t = 6s$$

Lo cual es correcto si comparamos con el resultado encontrado en el ejemplo 3.24 por el método gráfico.

Como podrá ver el estudiante, los problemas de cinemática en una dimensión pueden resolverse por el método analítico así como por el método gráfico. Sólo que en unos casos resulta más sencillo usar el método gráfico y en otros el método analítico.

Ejemplo 3.28

El gráfico *v* vs. *t* de la figura *3.21* representa el movimiento de una partícula en línea recta. Analice el gráfico y calcule las aceleraciones, el desplazamiento y la distancia recorrida.

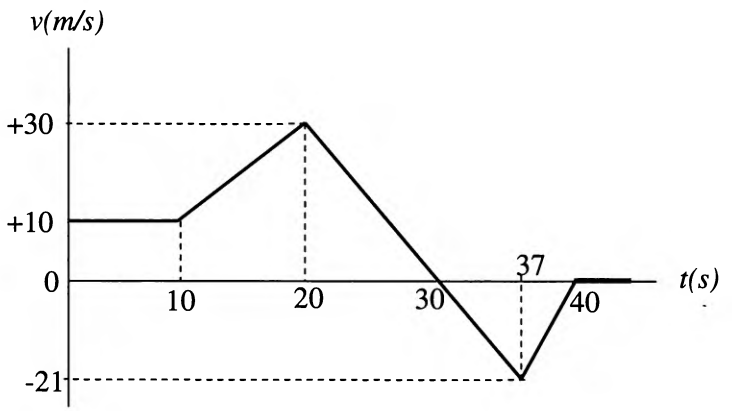


Figura 3.21

Este gráfico representa el movimiento de una partícula en línea recta. Se observa que para *t = 0* la partícula se mueve con velocidad constante igual a *+10 m/s* y lo hace durante *10 s*. Luego, la partícula empieza a aumentar su velocidad y se sigue alejando del origen. Entre *10s* y *20s*, la partícula incrementa su velocidad uniformemente y la pendiente de la recta que es constante representa la aceleración. En este caso la pendiente se calcula de la siguiente forma:

$$a = \frac{30\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s}}{20s - 10s} \qquad\qquad a = 2\frac{m}{s^2}$$

La partícula mantiene esta aceleración constante hasta que el tiempo llega a *20s*. Después, a partir de los *veinte segundos* empieza a disminuir su velocidad de forma

uniforme hasta que a los *30 segundos* su velocidad se hace *cero*. Inmediatamente después su velocidad se hace negativa y esto implica que cambió la dirección de su movimiento, por lo tanto empieza a moverse hacia el origen (en dirección opuesta). Se observa que a los *37s*, cuando ha alcanzado una velocidad de *-21m/s*, la partícula empieza a disminuir su rapidez hasta que a los *40 segundos* se detiene ya que su velocidad es *cero*. Después de los *40 segundos* se observa que la línea es horizontal lo que quiere decir que la partícula se quedó en reposo.

CÁLCULO DE LAS ACELERACIONES:

De *0* a *10* segundos como la partícula se mueve con velocidad constante, su aceleración es igual a *cero*.

De *10* a *20s* es similar a lo que ya se hizo anteriormente, es decir se calcula su pendiente, y esto es:

$$a = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0} \qquad a = \frac{30\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s}}{20s - 10s} \qquad a = 2\frac{m}{s^2}$$

De *20s* a *37s* la aceleración es negativa. Igualmente se calcule el valor de la pendiente, y su valor es:

$$a = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0} \qquad a = \frac{-21\frac{m}{s} - 30\frac{m}{s}}{37s - 20s} \qquad a = -3\,{}^{m}/_{s^2}$$

De los *37s* a los *40s* su aceleración es positiva pero va disminuyendo paulatinamente hasta llegar a *cero*. Su valor es:

$$a = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0} \qquad a = \frac{0 - \left(-21\frac{m}{s}\right)}{40s - 37s} \qquad a = 7\,{}^{m}/_{s^2}$$

De los *40s* en adelante la gráfica muestra una línea horizontal lo que indica que su velocidad es constante, pero en este caso la velocidad constante es igual a *cero*. Es decir la partícula permanece en reposo.

CÁLCULO DEL DESPLAZAMIENTO Y DISTANCIA RECORRIDA

La gráfica *velocidad* vs. *tiempo* también nos permite calcular el desplazamiento y la distancia recorrida por la partícula.

En el caso del gráfico anterior, se puede calcular el desplazamiento si medimos el área bajo la curva.

De *0* a *10s*, el área es igual a *100m*. Esta cantidad indica que la partícula se ha movido *100m* durante los *10 primeros segundos*.

De *10*s a *20s*, el área es igual a: $10 \times 10m + \frac{1}{2}(10)(20)m = 200m$

Esto representa lo que la partícula se ha movido durante el intervalo de *10* a *20s*.

De los *20s* a los *30s* el área es igual a: $\frac{1}{2}(10)(30)m = 150m$. En este intervalo de tiempo la partícula se ha movido *150m*.

Todos los movimientos de la partícula desde *0s* hasta *30s* han sido hacia la derecha (dirección positiva del eje de las x). Se debe notar que a partir de este momento, la velocidad de la partícula es negativa. Es decir que a partir de los *30s* la partícula se estará moviendo hacia la izquierda. Estos desplazamientos por lo tanto serán negativos.

De los *30s* a los *40s*, el área es igual a: $\frac{1}{2}(10)(-21)m = -105m$. Esta cantidad de metros es lo que la partícula se ha regresado, es decir, se ha movido hacia la izquierda.

Por lo tanto el desplazamiento será: $\Delta x = (100 + 200 + 150 - 105)m; \quad \Delta x = 345m$

La distancia recorrida será: $d = (100 + 200 + 150 + 105)m \qquad d = 555m$

Se deja al estudiante para que calcule el desplazamiento y la distancia recorrida durante el intervalo de *10s* a *37s*.

3.10 GRÁFICO ACELERACIÓN VS. TIEMPO

Este tipo de gráfico muestra la aceleración de una partícula que se mueve en línea recta con relación al tiempo. El área bajo la curva del gráfico *a* vs. *t* representa el ***cambio de velocidad*** en ese periodo de tiempo. Igual que antes, las áreas que están arriba del eje del tiempo se consideran positivas, mientras que las áreas que se encuentran debajo del eje del tiempo se consideran negativas.

El siguiente gráfico representa el movimiento de una partícula que se mueve en línea recta. Calcule el cambio de velocidad que sufre la partícula entre 0 y 10s.

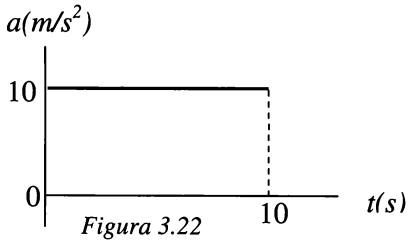


Figura 3.22

En este gráfico $a\ vs.\ t$ el área bajo la curva (en este caso es una recta horizontal) es igual a: $10\frac{m}{s^2} \times 10s = 100\frac{m}{s}$. Esta cantidad de *100 m/s* es la diferencia entre la velocidad cuando la partícula está en $t = 0s$ y $t = 10s$.

Ejemplo3.29

Con referencia a la figura 3.22, si la velocidad para $t = 0s$ es igual a *20 m/s*, entonces ¿cuál será la velocidad de la partícula para $t = 10s$?

$$\text{área bajo la curva} = 100\frac{m}{s} = v_{10} - v_0; \qquad v_{10} = v_0 + 100\frac{m}{s}$$

$$v_{10} = 20\frac{m}{s} + 100\frac{m}{s} \quad v_{10} = 120\frac{m}{s}$$

También se puede hallar la velocidad cuando $t = 8s$ por ejemplo. Supongamos que la velocidad a $t = 0s$ sigue siendo de *20 m/s*. En este caso, el área bajo la curva sería:

$10\frac{m}{s^2} \times 8s = 80\frac{m}{s}$ esta cantidad es la diferencia de velocidad entre $t = 0s$ y $t = 8s$.
Así: $80\frac{m}{s} = v_8 - v_0$; $v_8 = 80\frac{m}{s} + 20\frac{m}{s}$; $v_8 = 100\frac{m}{s}$

Cuando una partícula se mueve en línea recta y con aceleración constante, en la gráfica *v vs. t*, es representada por medio de una línea recta y, como la pendiente de una línea recta es constante, implica que la aceleración sería constante. Por lo tanto, siempre que la velocidad de una partícula varíe uniformemente y por tanto en la gráfica *v vs. t* el gráfico esté representado por una línea recta, en la gráfica *a vs. t* debe ser una línea horizontal. Debe recordarse que el área bajo la curva de este último gráfico representa el cambio de velocidad en un intervalo de tiempo y no simplemente representa la velocidad.

Ejemplo 3.30

Realice el gráfico velocidad vs. tiempo y aceleración vs. tiempo de un objeto que es lanzado desde la superficie de la Tierra y que regresa al punto donde fue lanzado.

Solución:

El objeto sale con velocidad inicial hacia arriba, por lo tanto su velocidad es positiva y cuando regresa al suelo su velocidad tiene la misma magnitud con la que salió pero su signo es negativo.

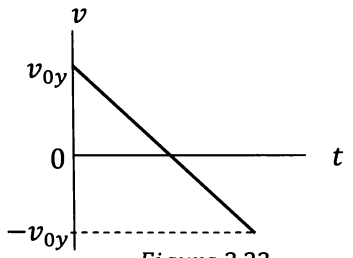


Figura 3.23

Debido a que la aceleración de la gravedad es aproximadamente constante sobre la superficie de la Tierra, la gráfica *a* vs. *t* debe ser una línea horizontal. Por convención de signos la aceleración es negativa debido a que se dirige hacia abajo.

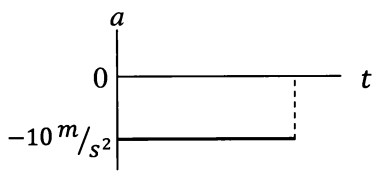


Figura 3.24

Ejemplo 3.31

Dado el gráfico *velocidad* vs. *tiempo*, de la figura 3.25, realice el diagrama *aceleración* vs. *tiempo.*

Solución:

Ahora, para cada tramo de la curva *velocidad* vs. *tiempo*, se analizará la forma de la gráfica para representar la aceleración.

Se puede observar que para todos los tramos de la gráfica *velocidad* vs. *tiempo*, tenemos líneas rectas, lo que implica que la *aceleración* para cada tramo es constante. Se debe recordar que la pendiente de la curva *velocidad* vs. *tiempo* representa la *aceleración*.

Analice la curva *v* vs. *t*, tramo a tramo.

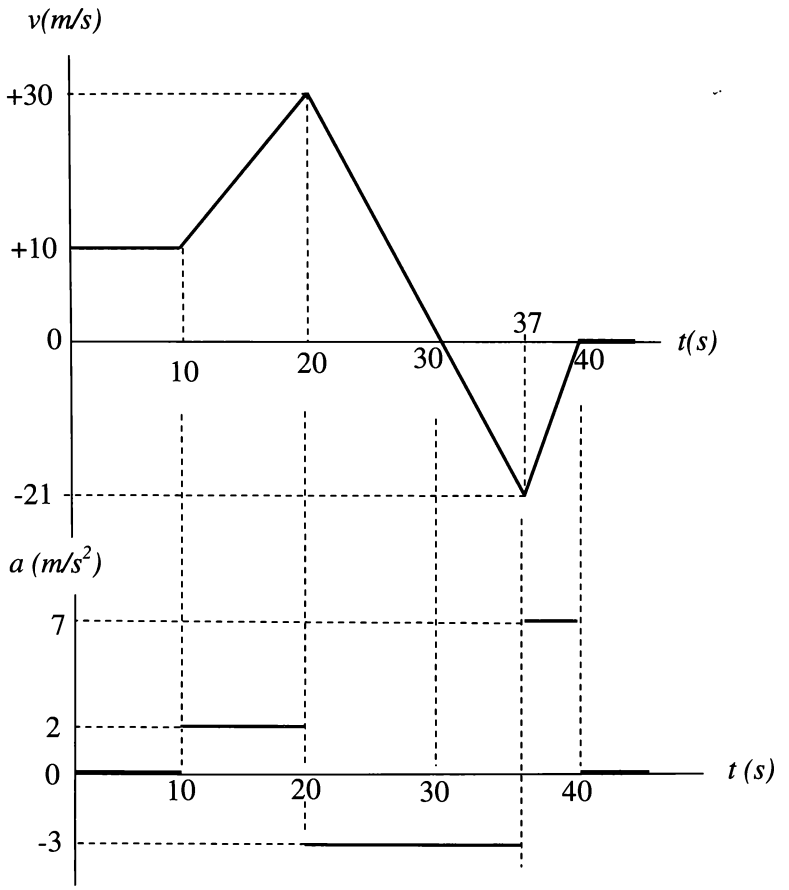


Figura 3.25

En el siguiente ejemplo, se nos proporciona el movimiento de una partícula que se mueve en línea recta en el gráfico *v-t* y a partir de éste, se debe graficar el mismo movimiento en un diagrama *x-t*.

Se debe observar que las líneas rectas en el gráfico *v-t* se convierten en curvas en el diagrama *x-t*. Se debe recordar que la pendiente de la curva en el gráfico *v-t* representa la aceleración de la partícula. Siempre se debe tener en mente de que la partícula se

mueve en una sola dimensión, es decir que la partícula se mueve siempre en línea recta, ya sea alejándose del origen o acercándose hacia él.

En la figura 3.26 se muestran dos gráficos, el primero es un gráfico velocidad vs. tiempo, y para obtener un gráfico posición vs. tiempo, se debe tener presente que la pendiente de la gráfica $x - t$ es la velocidad de la partícula. Por lo tanto, en aquellos tramos en el que la velocidad de la partícula es constante, en el gráfico $x - t$ será una línea recta e inclinada.

Ejemplo 3.31

Dada la siguiente figura v vs. t, construya el diagrama x vs. t

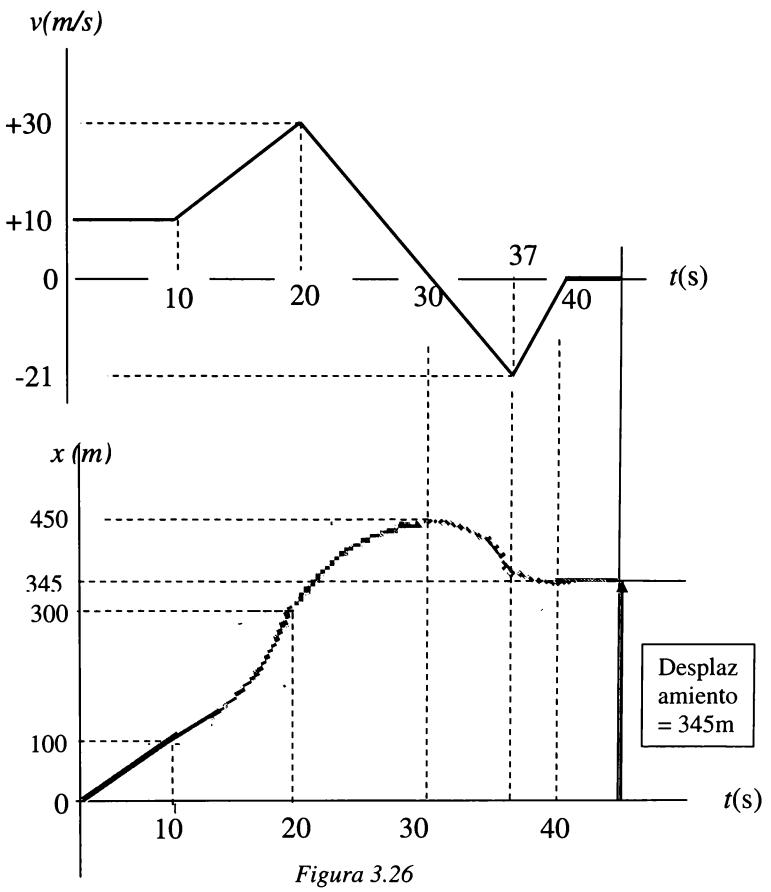


Figura 3.26

Se deja para el estudiante compruebe que la distancia total recorrida por la partícula es de *555m* y que el desplazamiento es *345m.* Use solamente el gráfico para realizar esta comprobación.

ACTIVIDAD 3.10

En la gráfica $x\ vs.\ t$ de la figura 3.27, se muestra el movimiento de una partícula en línea recta. Se observa que la curva (que es una línea recta) cruza el eje del tiempo. Entonces, ¿la partícula, en algún instante, cambia la dirección del movimiento? Explique.

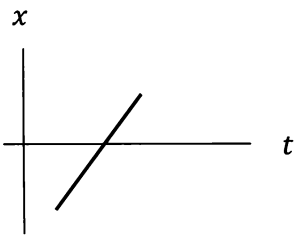


Grafico 3.27

ACTIVIDAD 3.11

En la gráfica $v\ vs.\ t$ mostrada, indique cuál de las siguientes alternativas es correcta.

a) La aceleración de la partícula es variable.
b) El desplazamiento es negativo.
c) La partícula cambia la dirección de la velocidad.
d) La aceleración de la partícula es cero.
e) La partícula no se mueve en línea recta.

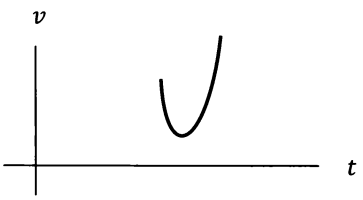


Gráfico 3.28

ACTIVIDAD 3.12

En un gráfico $a\ vs.\ t$, ¿cuál de las siguientes alternativas es correcta?

a) El área bajo la curva representa el desplazamiento.
b) El área bajo la curva representa la velocidad final.
c) El área bajo la curva representa el cambio de velocidad.
d) La pendiente de la curva es la aceleración.
e) La pendiente de la curva es la velocidad.

PROBLEMAS

3.1 Desde el filo de una azotea se lanza una piedra P_1 con una rapidez hacia arriba de v_0. Desde el mismo lugar, se lanza otra piedra P_2 con una rapidez hacia abajo de v_0. ¿Qué se puede afirmar acerca de la rapidez con que golpean la Tierra.

3.2 ¿Cuando un objeto se mueve hacia arriba la aceleración de la gravedad es positiva o negativa? Explique.

3.3 ¿Cuando un cuerpo se mueve hacia abajo la aceleración de la gravedad es positiva o negativa? Explique.

3.4 Cuando una piedra que es lanzada hacia arriba llega a su altura máxima ¿cuál es el valor de su aceleración?

3.5 Suponga que usted lanza una piedra rápidamente hacia abajo. Entonces la aceleración con que se mueve la piedra ¿será mayor, igual o menor que el valor de la aceleración de la gravedad?

3.6 Un objeto de masa $m_1 = 2\ kg$ y otro objeto de masa $m_2 = 4\ kg$ son lanzados hacia arriba con la misma velocidad inicial. ¿Cuál de ellos alcanza mayor altura?

3.7 Un cuerpo se mueve hacia la derecha y su rapidez va disminuyendo paulatinamente, entonces su aceleración es ¿positiva o negativa? Explique.

3.8 Un cuerpo se mueve hacia la izquierda y su rapidez se va incrementando paulatinamente, entonces ¿su aceleración es positiva o negativa? Explique.

3.9 Un cuerpo parte con una velocidad inicial de 30 *m/s*, y después de 40 *segundos* su velocidad es de -10 *m/s*. Calcule la distancia total recorrida por el cuerpo.

3.10 Un carro parte de la ciudad *A* y se dirige hacia la ciudad *B* con velocidad constante de 80 *km/h*. Al mismo tiempo, otro carro sale de la ciudad *B* y se dirige hacia la ciudad *A* con velocidad constante de 60 *km/h*. Cuando los carros estén a 6 minutos de cruzarse, ¿qué distancia hay entre ellos?

3.11 Una piedra es lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de 20.0 *m/s*. Después de 3.0 *segundos* se deja caer una segunda piedra desde el mismo lugar. ¿Cuál es el tiempo en que la segunda piedra llega al suelo?

3.12 Desde la azotea de un edificio se lanza una piedra hacia arriba con una rapidez inicial de 20.0 *m/s* y tarda 8 segundos en llegar al suelo, ¿cuál es la distancia total recorrida por la piedra?

3.13 Desde una altura de 500 *metros* se deja caer un objeto. ¿A cuántos metros desde el punto donde el objeto cae debe encontrarse un camión para que el objeto caiga sobre él? Suponga que el camión se mueve con velocidad constante de 20 *m/s*.

3.14 Un carro sale de la ciudad *A* con una rapidez de 60*km/h* y se mueve hacia la ciudad *B*. Al mismo tiempo un carro sale de la ciudad *B* y se mueve hacia la ciudad *A* a 80*km/h*. Suponga que la distancia entre las dos ciudades es de 280*km*. Calcule la distancia, con respecto a la ciudad *A*, en que los carros se cruzan.

3.15 Un avión vuela horizontalmente a una altura de 1000 m con una velocidad constante de 500 m/s cuando suelta una bomba ¿Cuántos segundos toma la bomba en llegar al blanco?

3.16 Sobre un vagón que se mueve horizontalmente a una rapidez de 100 km/h, se encuentran un hombre que corre sobre el vagón y una mujer que se mantiene sentada.

a) ¿Cuál es la velocidad del hombre con respecto a la mujer?

b) ¿Cuál es la velocidad del hombre con respecto al hombre que está en el suelo?

c) ¿Cuál es la velocidad de la mujer con respecto al hombre que está en el suelo?

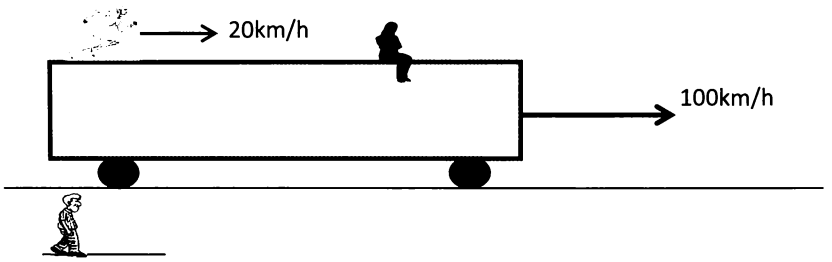


Figura 3.29

3.17 Si la longitud del vagón del problema 3.16 es de 100 m, ¿en cuántos segundos el hombre llegará al otro extremo del vagón?

3.18 Una bala de 20 gramos es disparada con una rapidez de 200 m/s hacia un árbol. El tiempo que la bala tarda en llegar al reposo dentro del árbol es de 0.25 s. ¿Cuál fue la aceleración promedio de la bala?

3.19 Una partícula se mueve en línea recta. Al tiempo $t = 0$ se halla a 10 metros hacia la izquierda del origen y luego se mueve con velocidad constante de modo que se acerca al origen. Después de 5 segundos se halla a 4 metros a la derecha del origen. Realice un gráfico x-t y calcule la velocidad media de la partícula en el intervalo entre $t = 0$ y $t = 5s$.

3.20 Desde lo alto de una acantilado de 200 m de altura se lanza un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s. Calcule la distancia total recorrida por el objeto usando un gráfico v-t

3.21 Un globo se mueve verticalmente hacia arriba a 20 m/s. si una persona que se encuentra dentro del globo suelta un objeto en el instante en que el globo está a 300 m del suelo, ¿cuál es el tiempo en que el objeto llegará al suelo?

3.22 El gráfico de la figura 3.30 muestra el movimiento de una partícula en línea recta. A partir del gráfico calcule:

a) El desplazamiento para todo el recorrido.
b) La distancia total recorrida.
c) La velocidad media para todo el recorrido.
d) La rapidez media para todo el recorrido.

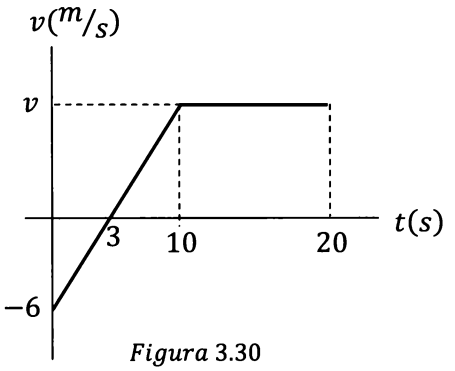


Figura 3.30

3.23 Usando el gráfico 3.31, calcule la velocidad a los 10.0 segundos sabiendo que la velocidad a los dos segundos es de -14.0 m/s.

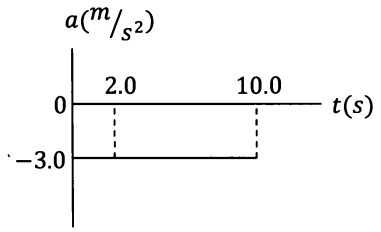


Figura 3.31

3.24 Una persona se mueve 100 metros hacia el Norte y luego regresa 20 m. ¿Cuál es la magnitud y la dirección del desplazamiento?

a) 120m hacia el Norte
b) 100 m hacia el Norte
c) 80m hacia el Norte
d) 80m hacia el Sur
e) 20m hacia el Sur.

3.25 Un objeto da media vuelta a lo largo de una pista de 100 metros de radio. Calcule la rapidez media del objeto si tardó 3.14s en el recorrido.

a) 628 m/s
b) 200 m/s
c) 100 m/s
d) 80 m/s
e) 31.4 m/s

3.26 Un objeto *A* se mueve a 10 m/s hacia la derecha. Después de que han trascurrido 5 segundos, otro objeto B parte del mismo punto desde el reposo e imprime una aceleración de 3 m/s^2. ¿Después de cuántos segundos de que salió el objeto *B* alcanza al objeto *A?*

a) 4 s
b) 6 s
c) 8 s
d) 10 s

3.27 El gráfico de la figura 3.32 muestra el movimiento de una partícula en línea recta. Calcule la distancia total recorrida por la partícula durante todo el recorrido.

a) 150 m
b) 125 m
c) 100 m
d) 75 m
e) 50 m

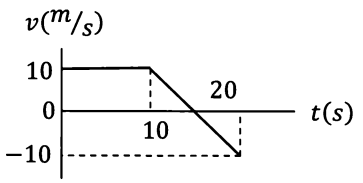


Figura 3.32

3.28 Para el gráfico del problema # 3.27 calcule la magnitud de la velocidad media durante todo el recorrido.

a) 5 m/s
b) 6 m/s
c) 8 m/s
d) 10 m/s
e) 12 m/s

3.29 Un objeto se mueve hacia la izquierda (hacia el eje $-x$) y poco a poco se va deteniendo, entonces la aceleración:

a) Está dirigida hacia la izquierda
b) Está dirigida hacia la derecha
c) Está dirigida perpendicularmente a la trayectoria
d) La aceleración es cero

3.25 Un objeto da media vuelta a lo largo de una pista de 100 metros de radio. Calcule la rapidez media del objeto si tardó 3.14s en el recorrido.

a) 628 m/s
b) 200 m/s
c) 100 m/s
d) 80 m/s
e) 31.4 m/s

3.26 Un objeto *A* se mueve a 10 m/s hacia la derecha. Después de que han trascurrido 5 segundos, otro objeto B parte del mismo punto desde el reposo e imprime una aceleración de 3 m/s^2. ¿Después de cuántos segundos de que salió el objeto *B* alcanza al objeto *A?*

a) 4 s
b) 6 s
c) 8 s
d) 10 s

3.27 El gráfico de la figura 3.32 muestra el movimiento de una partícula en línea recta. Calcule la distancia total recorrida por la partícula durante todo el recorrido.

a) 150 m
b) 125 m
c) 100 m
d) 75 m
e) 50 m

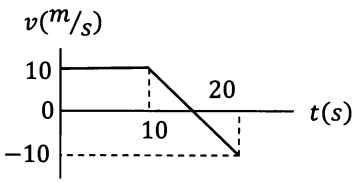


Figura 3.32

3.28 Para el gráfico del problema # 3.27 calcule la magnitud de la velocidad media durante todo el recorrido.

a) 5 m/s
b) 6 m/s
c) 8 m/s
d) 10 m/s
e) 12 m/s

3.29 Un objeto se mueve hacia la izquierda (hacia el eje $-x$) y poco a poco se va deteniendo, entonces la aceleración:

a) Está dirigida hacia la izquierda
b) Está dirigida hacia la derecha
c) Está dirigida perpendicularmente a la trayectoria
d) La aceleración es cero

3.30 Una partícula parte del origen con una velocidad inicial de +10 m/s y se mueve en la dirección del eje positivo de las x con aceleración constante de -1 m/s^2. ¿Cuál es su desplazamiento después que han transcurrido 20 segundos?

a) 400 m
b) 300 m
c) -400
d) CERO

CINEMÁTICA EN DOS DIMENSIONES

CAPÍTULO 4

INTRODUCCIÓN

No todo se mueve en línea recta, en la naturaleza muchos cuerpos y partículas, se mueven en dos o tres dimensiones, donde la velocidad y la aceleración no están en la misma línea de acción. Pero muchos de los movimientos de los cuerpos pueden ser estudiados con buena aproximación en el plano, es decir, en dos dimensiones. Así por ejemplo, cuando orientamos un chorro de agua hacia las plantas para regarlas, cuando se observa el chorro de agua que sale por un orificio de un reservorio, cuando un deportista lanza la jabalina en una competencia, cuando un bote trata de cruzar un río, cuando analizamos el movimiento de las ruedas de un auto. Todos estos son ejemplos de movimientos en dos dimensiones y algunos pueden observarse en las figuras 4.1 y 4.2.

Figura 4.1

Figura 4.2

4.1 MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

Un caso del movimiento en dos dimensiones es el movimiento de proyectiles cuando son lanzados sobre la superficie terrestre. Este es un movimiento importante en el cual el proyectil se mueve en dos o en tres dimensiones. En este capítulo analizaremos sólo el movimiento en dos dimensiones. Este movimiento tiene aceleración constante, es decir, su magnitud y su dirección permanecen invariables en el espacio y en el tiempo siempre y cuando se desprecie la resistencia de aire.

En este capítulo el movimiento de proyectiles será analizado en dos dimensiones, es decir, en el plano xy.

Si se lanza un proyectil en el campo gravitacional terrestre con una velocidad inicial v_0, formando un ángulo con respecto a la horizontal θ_0, las componentes de la velocidad inicial en el eje x y en el eje y son v_{0x} y v_{0y}, respectivamente.

En el punto de altura máxima el proyectil tiene velocidad y aceleración diferente de cero $v_{0x} = v_0 \cos\theta = \text{constante}$, $v_y = 0$ y a = g ↓

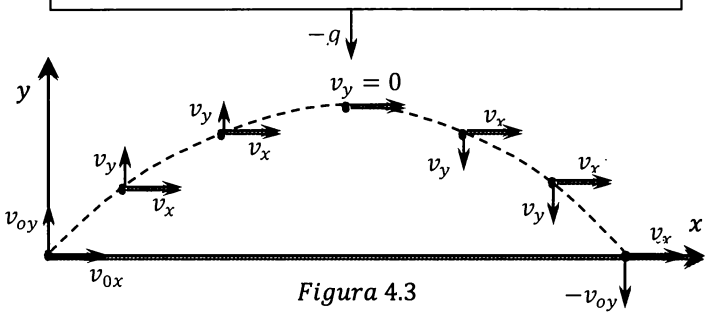


Figura 4.3

La velocidad en x es constante (Despreciando la resistencia del aire)

La velocidad en y varía con el tiempo

Debido a que verticalmente existe una aceleración llamada gravedad, que está siempre dirigida hacia al centro de la tierra, la componente de la velocidad en y , v_y, será variable con respecto al tiempo.

Como en el eje horizontal se desprecia la resistencia del aire, entonces, no existe aceleración en esa dirección. Así, la componente de la velocidad en el eje x permanece invariable.

La trayectoria que describe un cuerpo lanzado con un ángulo respecto a la horizontal, en el campo gravitacional de la Tierra, puede ser descrita en un plano xy como se indica en la figura 4.3.

4.2 ECUACIONES A UTILIZARSE

Como verticalmente está influenciando la aceleración de la gravedad en el eje vertical, el movimiento será analizado usando las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado o de caída libre.

$$v_y = \pm v_{0y} - gt \qquad (4.1)$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) \qquad (4.2)$$

$$y - y_0 = \pm v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (4.3)$$

Como horizontalmente no existe aceleración en el eje horizontal x, se analizará con las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme con velocidad constante, siempre y cuando se desprecie la resistencia del aire.

$$x - x_0 = v_x t \tag{4.4}$$

$$x - x_0 = v_0 \cos\theta \times t \tag{4.5}$$

La velocidad del cuerpo en cualquier posición puede escribirse como:

$$v = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} \tag{4.6}$$

La magnitud de la velocidad está dada por la siguiente ecuación.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{4.7}$$

Y el ángulo con respecto a la horizontal se determina por la función trigonométrica tangente de θ

$$\tan\theta = \frac{|v_y|}{|v_x|} \tag{4.8}$$

4.2.1 Demostración de la ecuación de la trayectoria

La ecuación de la trayectoria descrita por una partícula lanzada con una v_0 y un ángulo θ con la horizontal, resulta de combinar las ecuaciones 4.3 y 4.5:
Considerando $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$

$y - y_0 = \pm v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$

$x - x_0 = v_0 \cos\theta \times t$ Despejando $t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$, para luego reemplazar en la ecuación 4.3

$y = \frac{v_0 sen\theta}{v_0 \cos\theta} \times x - \frac{1}{2} g \times \frac{x^2}{{v_0}^2 \cos^2\theta}$ Simplificando v_0 y usando la identidad trigonométrica

$\frac{1}{\cos^2\theta} = (\tan^2\theta + 1)$ Reemplazando se tiene $y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v_0^2}(\tan^2\theta + 1)x^2$
(4.9)

La ecuación 4.9 se la conoce como ecuación de la trayectoria.

La ecuación 4.9 tiene la forma $y = ax + bx^2$ ***que es la ecuación de la parábola.***

4.2.2 Calculo del alcance máximo horizontal.

El alcance máximo está dado por: $x = v_0 cos\theta \times t_{vuelo}$

Donde el tiempo de vuelo para la figura 4.4 está dado por: $t_{vuelo} = \frac{2v_0 sen\theta}{g}$

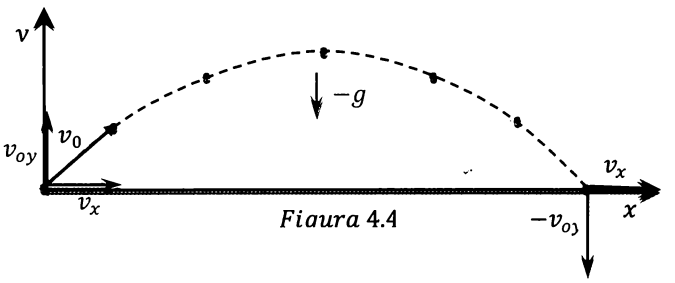
Así, el alcance horizontal máximo es: $x_{max} = \frac{v_{0sen2\theta}^2}{g}$ (4.10)

4.2.3 Ejercicios de aplicación

Ejemplo 4.1

Un proyectil es lanzado desde el suelo con una velocidad inicial de $10.0\,^{m}/_{s}$ y formando un ángulo de 30^0 con la horizontal como se muestra en la figura 4.4. Calcule:

a) El tiempo en que el proyectil llega a su máxima altura.
b) El tiempo en el que el proyectil vuelve al suelo
c) La altura máxima que alcanza el proyectil.
d) El alcance máximo.
e) La velocidad del proyectil cuando llega al suelo.



Fiaura 4.4

Solución:

a) Cuando el proyectil llega a su altura máxima, su velocidad en la dirección vertical es cero, es decir, $v_y = 0$.

De la expresión: $v_y = v_{0y} - gt$ y haciendo $v_y = 0$, el tiempo de subida es:

$$t_{sub} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 sen\theta}{g}$$

Remplazando los datos dados en el ejercicio,

$$t_{sub} = \frac{10.0\frac{m}{s} \times sen30^0}{10\,{}^{m}/_{s^2}}$$

$$t = 0.50s$$

b) Para calcular el tiempo vuelo del proyectil, se puede usar la ecuación del desplazamiento: $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$, y como el proyectil llega al plano horizontal, entonces, $y = 0$. De este modo se calculará el tiempo total.

Así, $0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ y despejando t, $\quad t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 sen\theta}{g}$

y, remplazando datos del problema queda:

$$t = \frac{2\left(10.0\,{}^{m}/_{s}\right)\left(sen30^0\right)}{10\,{}^{m}/_{s^2}} \qquad t = 1.0s$$

Por lo tanto, el tiempo de vuelo será la dos veces el tiempo de subida.

En este ejemplo se puede apreciar que el tiempo de subida es igual al tiempo de bajada.

c) En el punto de altura máxima, la velocidad en la dirección vertical, v_y es cero.

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy$$

despejando y_{max}, se tiene: $y_{max} = \frac{(v_{0y})^2}{2g} = \frac{v_0^2 sen^2\theta}{2g}$

reemplazando datos: $y_{max} = \frac{(10.0^{m}/_{s})^2 \times sen^2 30^0}{2\left(10^{m}/_{s^2}\right)}$

$$y_{\max} = 1.25m$$

d) Para calcular el alcance máximo, usaremos la ecuación $x = v_{0x}t$ en donde el tiempo será el tiempo de vuelo.

Considerando que el tiempo de vuelo es de 1.0s como se demostró en el literal *b* de este ejemplo, entonces:

$$x_{\max} = v_{0x} \times t_{vuelo} = v_0 \cos\theta \times t_{vuelo}$$

Remplazando datos: $x_{max} = 10.0\frac{m}{s} cos 30^0 \times 1.0s$

$$x_{\max} = 8.7m$$

Alcance máximo también puede calcularse con la siguiente ecuación 4.10 siempre que describa una parábola simétrica, es decir, que la altura del punto de lanzamiento coincida con la altura del punto de llegada. Ver ecuación 4.10

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 sen2\theta}{g}$$

$$x_{\max} = \frac{(10m/s)^2 sen2\times 30^0}{10\frac{m}{s^2}} = 8.7m$$

e) Cuando la partícula llega al suelo, y considerando que el suelo es una superficie horizontal, las componentes de la velocidad serán iguales a las componentes de la velocidad al momento que el proyectil salió desde el punto de partida. El único cambio es que la componente de la velocidad en la dirección vertical será negativo en el instante que golpea el suelo. La componente en x mantiene su magnitud y su dirección sin cambio alguno.

La componente en y es: $v_{0y} = -v_0 sen\theta$ y la componente es x es: $v_{0x} = v_0 cos\theta$

$v_{0y} = -10.0^{m}/_{s} sen 30^0$ $\quad v_{0y} = -5.0^{m}/_{s}$

$v_{0x} = 10.0^{m}/_{s} \cos 30^0$ $\quad v_{ox} = 8.7^{m}/_{s}$

La velocidad de la partícula al llegar al suelo será:

$$\vec{v} = (8.7\hat{\imath} - 5.0\hat{\jmath})^{m}/_{s}$$

El lector puede comprobar que el módulo de esta velocidad es igual a 10.0, y que su dirección es de -30^0.

ACTIVIDAD 4.1

Un bloque es lanzado sobre una superficie horizontal lisa con una velocidad v como se indica en la figura 4.6. Si el bloque impacta en el piso a 10 m de la base, entonces:

a) Calcular el tiempo de vuelo.

b) Calcular la velocidad inicial del bloque.

c) Calcular la velocidad de impacto.

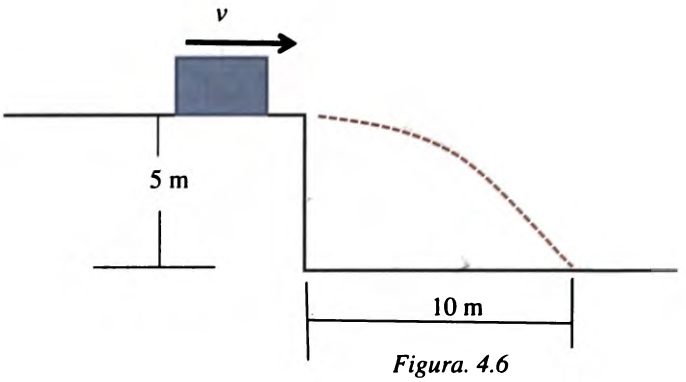


Figura. 4.6

ACTIVIDAD 4.2

Se lanza un proyectil desde la terraza de un edificio de 100 m de altura con una velocidad inicial de 8 m/s y formando un ángulo de 30^0 con la horizontal. El proyectil impacta en un blanco a 50 m de altura, como se muestra en la figura 4.7.

a) Calcular el tiempo de vuelo del proyectil hasta impactar en el blanco.

b) Calcular el alcance del proyectil.

c) Calcular la velocidad de impacto del proyectil.

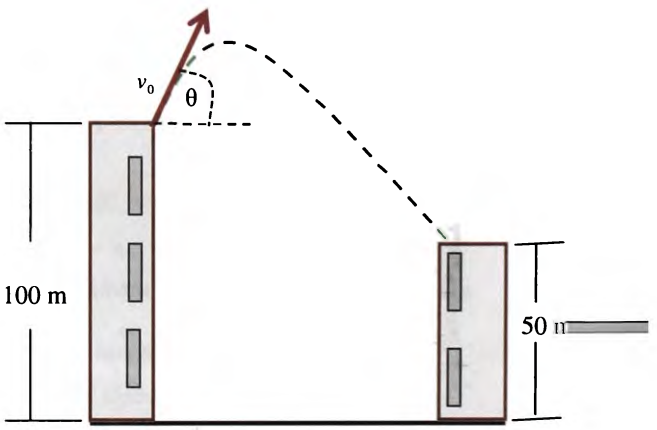


Figura. 4.7

4.3 DESPLAZAMIENTO ANGULAR

Es el cambio de la posición angular que presenta un cuerpo en todo su recorrido $\Delta\theta$. Las unidades más comunes en las que se puede representar el desplazamiento angular son: radianes, grados y revoluciones. El desplazamiento angular es el ángulo comprendido entre dos posiciones angulares θ_2 y θ_1 y su relación es $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

Longitud de arco (s): Es la distancia o recorrido circular entre dos puntos de una trayectoria circular y puede determinarse con la siguiente ecuación.

$$S = \theta \times R \qquad (4.11)$$

donde θ está en radianes.

Radian (rad): Es el ángulo comprendido entre la longitud del arco (S) donde S = R, como se muestra en la figura 4.8.
Otra forma de determinar el desplazamiento angular $\Delta\theta$, es despejando de la ecuación 4.11 y se obtiene la siguiente ecuación $\theta = \frac{S}{R}$

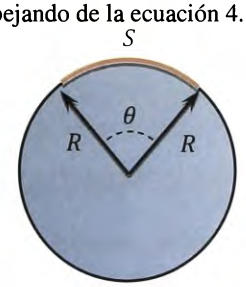


Figura 4.8

Para determinar la relación entre radianes y grados se toma una longitud de arco S igual a la longitud de una circunferencia de $2\pi R$ con un radio igual a R, luego, se despeja el desplazamiento angular de la ecuación 4.11 $\theta = \frac{S}{R}$.

$$\boxed{\theta = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \ rad}$$

como una vuelta o una revolución tiene 360^0, entonces, $360^0 = 2\pi$ rad. Por lo tanto.

$$1rad = 57.3^0 \qquad 1rev = 360^0 = 2\pi \ rad$$

Ejemplo 4.3

Un deportista corre en una pista circular una distancia de 800 m, la pista tiene un radio de 200 m, entonces, determine:
a) El desplazamiento angular en radianes.
b) El desplazamiento angular en revoluciones.
c) El desplazamiento angular en grados.
Datos:
S= longitud del arco (es la distancia que ha recorrido el deportista)
S= 800 m
R= radio de la trayectoria circular.

R= 200 m.
Solución.

a) Determine el desplazamiento angular en radianes.
El desplazamiento angular se despeja de la ecuación 4.11, como se muestra a continuación.

$$\theta = \frac{S}{R} \qquad \theta = \frac{800\text{m}}{200\text{m}} rad = 4rad$$

b) Determine desplazamiento angular en revoluciones.
Para determinar el desplazamiento angular en revoluciones se utiliza el factor de conversión 1revolución = 2πrad

$$\theta = 4rad \times \frac{1rev}{2\pi rad} = \frac{4rev}{2\pi} = \frac{2}{\pi} rev$$

c) Determine el desplazamiento angular en grados.
Para determinar el desplazamiento angular en grados se utiliza el factor de conversión $1revolución = 360^0$

$$\theta = \frac{2}{\pi} rev \times \frac{360^0}{1rev} = 229.2^0$$

4.4 RAPIDEZ ANGULAR MEDIA

Rapidez angular media (ω_m)**:** es la relación entre el módulo del desplazamiento angular y el tiempo, es un escalar y representa la magnitud de la velocidad angular. Ver figura 4.9.

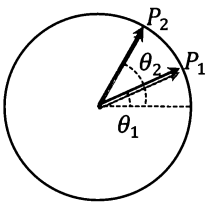


Figura 4.9

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \qquad (4.12)$$

Ejemplo 4.4

Una partícula se mueve desde el punto P_1 hasta el punto P_2 en una pista circular de radio $R = 3m$ en 0.50 s, como se indica en la figura 4.9. Si $\theta_1 = 15^0$ y $\theta_2 = 45^0$, se pide, determinar:

a) El desplazamiento angular $\Delta\theta$.

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 45^0 - 15^0 = 30^0 \times \frac{2\pi}{360^0} = \frac{\pi}{6} rad$$

b) La rapidez angular.

$$\omega = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{\pi}{6}}{0.50s} = \frac{\pi}{3} \frac{rad}{s}$$

c) La distancia recorrida por la partícula

La distancia recorrida por la partícula es el arco de la circunferencia S.

Entonces $\Delta\theta = \frac{S}{R}$ $\qquad S = \Delta\theta \times R = \frac{\pi}{6} \times 3m = \frac{\pi}{2} m = 1.57m$

ACTIVIDAD 4.3

Determinar la rapidez angular del minutero de un reloj.

Rapidez angular instantánea (ω) se la obtiene al aplicar el límite a la velocidad angular media (ω_m) cuando Δt tiende a cero. Es la rapidez angular en un instante determinado de tiempo.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (4.13)$$

4.5 VELOCIDADES ANGULARES MEDIA E INSTANTÁNEA

La velocidad angular media ($\bar{\omega}$) de un cuerpo que está rotando es un vector que representa el desplazamiento angular Δθ en un intervalo de tiempo Δt y está expresado como:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \bar{\omega} = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{(t_2 - t_1)} \qquad (4.14)$$

La velocidad angular instantánea ($\vec{\omega}$) se la representa como el límite de la velocidad angular media en un intervalo de tiempo muy pequeño Δt ($\Delta t \to 0$) y está expresada como:

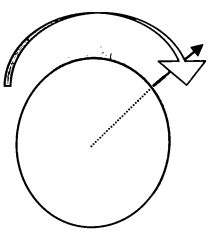
$$\omega_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

La velocidad angular es un vector perpendicular al plano y cumple la regla de la mano derecha. Ver figura 4.10 y 4.11

Si el cuerpo de la figura 4.10 está girando en contra de las manecillas del reloj, la regla de la mano derecha consiste en colocar los dedos de la mano derecha en la dirección de rotación del cuerpo, el pulgar extendido muestra la dirección del vector velocidad angular. La figura 4.10 muestra que el vector velocidad angular está saliendo del plano de la hoja del papel.

$\Delta\theta(+) \Rightarrow \omega(+)$

Figura. 4.10



$\Delta\theta(-) \Rightarrow \omega(-)$

Figura. 4.11

De forma vectorial la velocidad lineal o tangencial se obtiene por el producto vectorial o producto cruz

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (4.15)$$

De forma escalar se obtiene la rapidez lineal o tangencial de la siguiente manera.

$$v = \omega r \qquad (4.16)$$

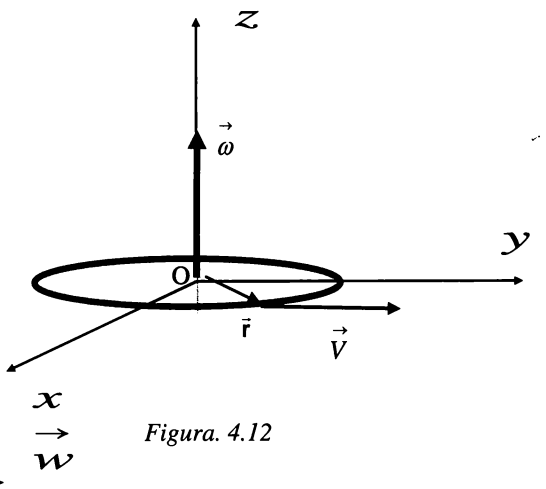


Figura. 4.12

Nota: El signo de $\vec{\omega}$ es positivo cuando $\Delta\theta$ (desplazamiento angular) es contrario a las manecillas del reloj y es negativo cuando es en la misma dirección de las manecillas del reloj. La unidad de la velocidad angular es $(\frac{rad}{s})$.

El radian no es una unidad y las unidades de la velocidad angular también puede escribirse en $[\frac{1}{s}]$

4.6 PARÁMETROS QUE AYUDAN A DESCRIBIR EL MOVIMIENTO CIRCULAR

En el movimiento circular encontramos parámetros como el período, la frecuencia y la frecuencia angula que se describen a continuación.

4.6.1 Período (T)

El período es el tiempo que tarda un cuerpo en realizar una revolución o una vuelta completa. Su unidad es el segundo (s) y su símbolo es T.

$$T = \frac{tiempo}{Número\ de\ revoluciones} = \frac{t}{N}[s] \qquad (4.17)$$

4.6.2 Frecuencia (f)

La frecuencia es el número de revoluciones que da un cuerpo en un segundo y su unidad es $\left\lfloor \frac{1}{s} \right\rfloor$, llamada también Hz. El símbolo de la frecuencia es f.

$$f = \frac{Número\ de\ revoluciones}{tiempo} = \frac{N}{t} \quad \left\lfloor \frac{1}{s} \right\rfloor \tag{4.18}$$

Nota: Una revolución es una vuelta completa, entonces 1rev = 2π rad

4.6.3 Relación entre el período, la frecuencia y la frecuencia angular

El período es el inverso de la frecuencia

$$T = \frac{1}{f} \tag{4.19}$$

La frecuencia angular en (rad/s) se relaciona con la frecuencia f(1/s) mediante la expresión.

$$\omega = 2\pi f \tag{4.20}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{4.21}$$

4.7 ACELERACIÓN CENTRÍPETA.

Si un cuerpo se mueve con rapidez constante v, en una trayectoria circular como se muestra en la figura 4.13, su velocidad cambia de dirección constantemente, y este cambio constante del vector velocidad da origen a una aceleración llamada aceleración centrípeta que está dirigida hacia el centro de su trayectoria.

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad \left\lfloor \frac{m}{s^2} \right\rfloor \tag{4.22}$$

En la figura 4.13 puede observarse que:

- La velocidad siempre es tangente a la trayectoria.
- La aceleración centrípeta siempre está dirigida hacia el centro de la trayectoria circular.
- La aceleración centrípeta es perpendicular a la velocidad tangencial.

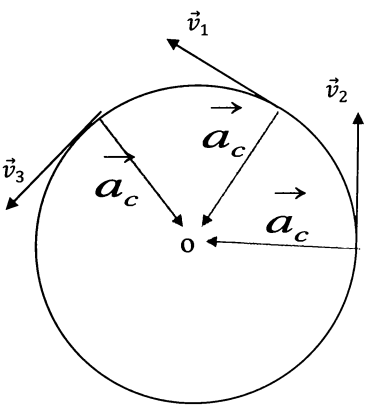


Figura. 4.13

Ejemplo 4.5

Un ciclista viaja a una velocidad constante de 60.0 $\frac{km}{h}$. Si el diámetro de las llantas de la bicicleta es 80 cm.

a) Calcule la rapidez angular de una llanta de la bicicleta

Para determinar la rapidez angular primero se procede a realizar la conversión de unidades de km/h a m/s, como se indica a continuación. También se determina el radio en metros.

$$60\frac{km}{h}\times\frac{1000m}{km}\times\frac{h}{3600s}=16.67\frac{m}{s} \qquad r=\frac{d}{2}=\frac{80cm}{2}=40cm\times\frac{1m}{100cm}=0.40m$$

Luego se utiliza la ecuación 4.13 para despejar la rapidez angular

$$\omega=\frac{v}{r}=\frac{16.67\frac{m}{s}}{0.40m}=41.68\frac{rad}{s}$$

b) Calcule el período de rotación de una llanta.

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{41.68\frac{1}{s}}=0.15\,s$$

c) Calcule la frecuencia de rotación de una llanta

$$T=\frac{1}{f} \qquad f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.15s}=6.67\frac{1}{s}=6.67Hz$$

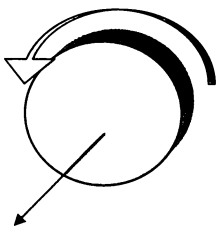
d) Calcule la magnitud de la aceleración centrípeta de un punto de la periferia de la llanta

$$a_c=\frac{v^2}{r}=\omega^2 r \qquad a_c=\omega^2 r=(41.681/s)^2\times 0.40m=694.89\frac{m}{s^2}$$

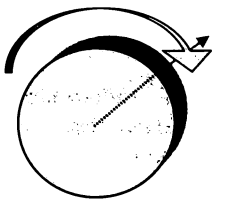
4.8 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME.

El movimiento circular uniforme es aquel que a iguales intervalos de tiempo le corresponde iguales desplazamientos angulares y su velocidad angular permanece constante.

Ecuaciones a utilizarse en el movimiento circular uniforme.



$\Delta\theta(+)\Rightarrow\omega(+)$



$\Delta\theta(-)\Rightarrow\omega(-)$

$$\omega_m=\frac{\theta_2-\theta_1}{t_2-t_1}=\text{constante}$$

$$\theta_2=\theta_1+\omega t \qquad (4.23)$$

Ejemplo 4.6

Con relación al ejemplo 4.5. Si el ciclista se mueve a velocidad constante durante 40 minutos. Calcular:

a) El desplazamiento angular en radianes.

Como en el ejemplo 4.5 se determinó la rapidez angular de 41.68 rad/s, luego, se realiza la conversión de unidades de minutos a segundos para finalmente utilizar la ecuación 4.19 para calcular el desplazamiento angular en ese tiempo.

$$\Delta\theta = \omega\Delta t = 41.68\frac{rad}{s} \times 40\,\text{min utos} \times \frac{60s}{1\,\text{minuto}} = 100032rad$$

b) El desplazamiento angular en grados

Para determinar el desplazamiento angular se utiliza el factor de conversión entre radianes y grados $2\pi rad = 360^0$

$$100032rad \times \frac{360^0}{2\pi rad} = 5.73^0 \times 10^6$$

c) El desplazamiento angular en revoluciones

Para determinar el desplazamiento angular en revoluciones se utiliza el factor de conversión entre revoluciones y grados $1rev = 2\pi rad$

$$100032rad \times \frac{1rev}{2\pi rad} = 15920.6rev$$

d) La distancia total recorrida por el ciclista en ese tiempo

La distancia recorrida por el ciclista se puede calcular como la rapidez lineal o tangencial de la periferia de la rueda multiplicada por el tiempo.

$$d = v \times t = 16.67\frac{m}{s} \times 2400s = 40008m$$

ACTIVIDAD 4.4

Determinar la frecuencia y el período del minutero de un reloj.

ACTIVIDAD 4.5

Las llantas de un automóvil tienen 60 cm de diámetro y las mismas realizan 40 revoluciones mientras el automóvil se desplaza a velocidad constante durante 10 s. Se pide:

a) Determinar el período de rotación de las llantas

b) La frecuencia de rotación de las llantas

c) La rapidez angular de las llantas

d) La rapidez tangencial de un punto de la periferia de las llantas

e) La magnitud de aceleración centrípeta de una partícula de la periferia de las ruedas.

ACTIVIDAD 4.6

La figura 4.14 muestra la rueda moscovita en un parque de diversiones que gira a una rapidez angular constante de $\frac{\pi}{15}\frac{rad}{s}$ y tiene un diámetro de 20.0 m. Determinar:

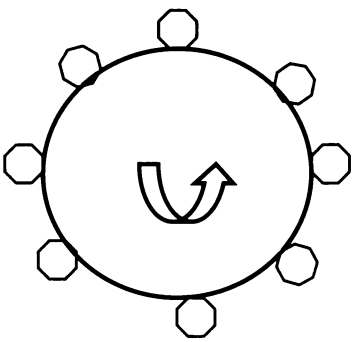


Figura 4.14

a) La frecuencia (Resp.: 1/30 Hz)

b) El período (Resp. : 30 s)

c) La rapidez tangencial que una persona experimenta en la rueda moscovita. (Resp.: $\frac{2}{3}\pi\frac{m}{s}$

d) El tiempo que tarda una persona en dar 20 vueltas (Resp: 600 s)

e) La aceleración centrípeta que experimenta una persona en la rueda moscovita (Resp.: 0.439 m/s^2)

ACTIVIDAD 4.7

Un satélite artificial está en órbita alrededor de la Tierra con un periodo de 5302 s, a una altitud de 200 Km. El radio de la tierra es de 6370 km.

a) Determinar la rapidez angular del satélite alrededor de la Tierra.

b) Determinar la rapidez tangencial del satélite.

c) Determinar la aceleración centrípeta que experimenta el satélite.

4.9 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO

4.9.1 Aceleración Angular (α)

La aceleración angular es el cambio de la velocidad angular (ω) con respecto al tiempo.

Para ilustrar este movimiento podemos observar en una bicicleta cuando empezamos a pedalear en un tiempo t_1 las ruedas tienen una velocidad angular ω_1, luego en un tiempo t_2 tienen una velocidad angular ω_2 y por lo tanto la aceleración media es α

La aceleràción angular media se presenta como α

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad \alpha_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \qquad (4.24)$$

Ecuaciones para el Movimiento Circular Uniformemente Variado	
$\omega = \omega_0 \pm \alpha t$	*(4.25)*
$\theta = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2$	*(4.26)*
$\omega^2 = \omega_0^2 \pm 2\alpha\theta$	*(427)*

Si una partícula cambia su rapidez angular, aparece una aceleración producida por la variación de la rapidez, la cual se denomina aceleración tangencial. Se debe tener presente que para este caso la aceleración resultante ya no es radial y está dada por la ecuación:

a) De forma vectorial $$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_r} \qquad (4.28)$$

donde $\vec{a}$ es la aceleración total; $\vec{a_r}$ la aceleración centrípeta y $\vec{a_t}$ la aceleración tangencial.

b) La magnitud de la aceleración es: $$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} \qquad (4.29)$$

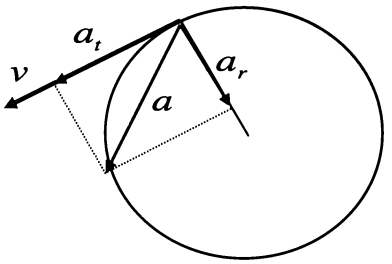


Figura. 4.15

ACTIVIDAD 4.8

Un carrito de juguete a control remoto de 200 g de masa describe una trayectoria circular de 4 m de radio, a una rapidez constante de 5 m/s y se mueve sobre una superficie plana, como se muestra en la figura 4.16.

a) Calcular la frecuencia de rotación del carrito

b) Calcular la magnitud de la aceleración media del carrito después que ha recorrido un cuarto de vuelta

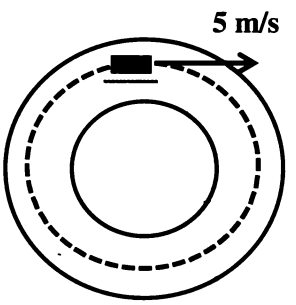


Figura. 4.16

c) Calcular la magnitud de la aceleración centrípeta del carrito

ACTIVIDAD 4.9

Un engranaje A es impulsado por un motor eléctrico a 1750 RPM y este engranaje **A** transmite movimiento a un engranaje **B**, como se indica en la figura 4.17.

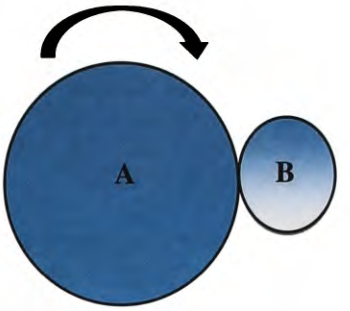


Figura. 4.17

Indicar si cada alternativa es verdadera o falsa y escribir su justificación respectiva en cada casa.

a) En el punto de contacto entre los engranajes A y B las rapideces tangenciales son diferentes.

b) El engranaje A tiene mayor rapidez angular que el engranaje B.

c) En el centro del engranaje B, la rapidez lineal es cero.

d) En el centro del engranaje B, la rapidez angular es cero.

e) Una partícula ubicada en la periferia del engranaje A tiene mayor aceleración centrípeta que una partícula ubicada en la periferia del engranaje B.

ACTIVIDAD 4.10

Andrés recorre en línea recta en su bicicleta una distancia de 50 m en un tiempo de 20 segundos. Sabiendo que Andrés se movió en su bicicleta a rapidez constante y que la rapidez angular de las llantas de la bicicleta es 10 rad/s. Determinar el radio de las llantas de la bicicleta.

a) 50 cm

b) 25 cm

c) 75 cm

d) 60 cm

e) 30 cm

ACTIVIDAD 4.11

En una caja de transmisiones de un automóvil se tiene el siguiente sistema de engranajes mostrado en la figura 4.18. Si el engranaje A rota a 1750 RPM. Considere que $R_A = 0.10\,m$; $R_B = 0.30\,m$; $R_C = 0.20\,m$

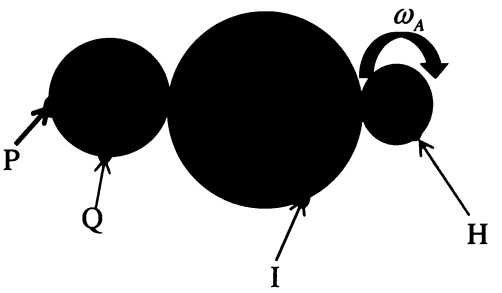


Figura 4.18

a) Calcular la rapidez tangencial de una partícula ubicada en el punto P en el engranaje C.
Resp.: 18.3 m/s

b) Calcular la magnitud e la aceleración centrípeta de una partícula ubicada en el punto I.
Resp.: 1116 m/s^2

c) Con relación a la magnitud de la aceleración centrípeta en este problema (figura 4.18) escoja la alternativa correcta.

a) $a_I > a_H = a_Q$
b) $a_I = a_H = a_Q$
c) $a_H > a_Q > a_I$
d) $a_I > a_Q > a_H$

4.10 VELOCIDAD RELATIVA

El término movimiento o reposo es relativo a los sistemas de referencia, es decir, una persona (partícula) que viaja en un bus, puede estar en reposo con respecto al bus, si se considera un sistema de referencia en el bus (S'); pero esa misma persona puede estar en movimiento con respecto a otra persona que está en la tierra a orilla de la carretera , es decir, con respecto a un sistema de referencia ubicado en la tierra (S).

Es importante indicar que para el entendimiento de velocidad y aceleración relativa deben identificarse tres aspectos importantes, que son: reconocer cual es la partícula, dónde está el sistema de referencia S', y S.

Decimos que el sistema de referencia S está fijo en la Tierra y que el sistema S' está en movimiento con relación a S.

Si se tienen dos sistemas de referencia S', S y la partícula como se observa en la figura 4.19.

La partícula puede ser: Un insecto, un auto, un pájaro, Superman, etc.

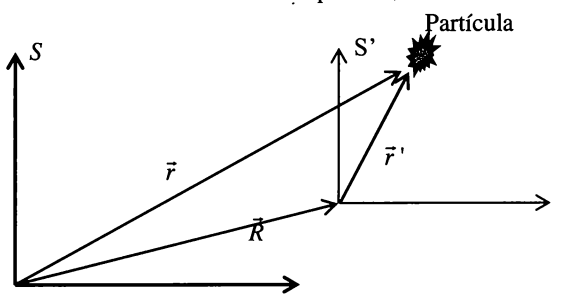


Figura. 4.19

$\vec{r}$ es el vector posición de la partícula con respecto a S.

$\vec{r}'$ es el vector posición de la partícula con respecto a S'

$\vec{R}$ representa el vector posición del origen del sistema de coordenadas S' con respecto S.

Si realizamos la suma de vectores $\vec{r}$, $\vec{r}'$ y $\vec{R}$.

r= R + r' entonces $\Delta r = \Delta r' + \Delta R$ y dividiendo para Δt queda:

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta r'}{\Delta t} + \frac{\Delta R}{\Delta t}$$

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$ donde, *(4.25)*

$\vec{u}$ es la velocidad relativa de S' con respecto al sistema de referencia que está fijo en la Tierra (S).

$\vec{v}'$ es la velocidad de la partícula relativa al sistema de referencia S'.

$\vec{v}$ es la velocidad relativa de la partícula relativa al sistema de referencia que está en la Tierra S.

Una recomendación importante para resolver problemas relacionados con velocidad relativa es identificar donde está S', S y cuál es la partícula.

4.10.1 Aceleración Relativa

Usando la expresión vectorial para la velocidad relativa $v = v' + u$ y considerando que u es constante, es decir, la velocidad del sistema S' se mantiene constante, y dividiendo la expresión de la velocidad relativa para el intervalo de tiempo, se tiene:

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}'}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}$$

Por lo tanto: $\vec{a} = \vec{a}'$. La aceleración es la misma en el sistema de referencia fijo en la Tierra *S* así como en el sistema de referencia movible *S'*. Esto es válido si el sistema de referencia movible *S'*_se mueve con velocidad constante con respecto al sistema de referencia fijo en la Tierra *S*.

Es decir, la aceleración de la partícula con respecto a S', es la misma aceleración de la partícula con respecto a S, "considerando U constante".

Ejemplo 4.7

1. Un helicóptero que se mueve orientado hacia el Norte con una velocidad de 50 km/h con respecto al aire. El aire se mueve con una velocidad de 15 km/h del Este al Oeste. Calcular la velocidad del helicóptero con respecto a un observador que está en reposo en la Tierra.

Solución.

Datos:

$\vec{v}' = 50\ \hat{j}$ km/h

$\vec{u} = -15\ \hat{i}$ km/h

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$

$\vec{v} = 50\hat{j}$ km/h $- 15\hat{i}$ km/h

$\vec{v} = \left(-15\hat{i} + 50\hat{j}\right) {}^{km}/_{h}$

$v = 52.2\,{}^{km}/_{h}$ con $\theta_R = 106.7^0$

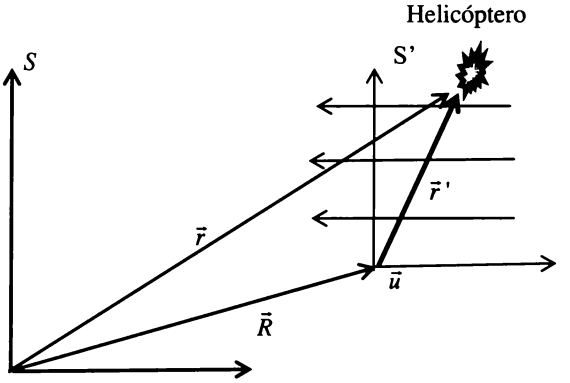


Figura 4.20

Ejemplo 4.8

Una persona intenta cruzar el río Guayas que fluye a una velocidad de 2 m/s de Sur a Norte como se indica en la figura 4.21. Si la persona puede nadar a 3 m/s en aguas tranquilas. Se pide:

a) ¿En qué dirección debe orientarse el nadador para llegar justo a la orilla opuesta frente al punto de partida?

Solución

Se va a calcular el ángulo θ está formado entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v}'$

$$sen\theta = \frac{u}{v'} = \frac{2}{3} \rightarrow \theta = 41.8^0$$

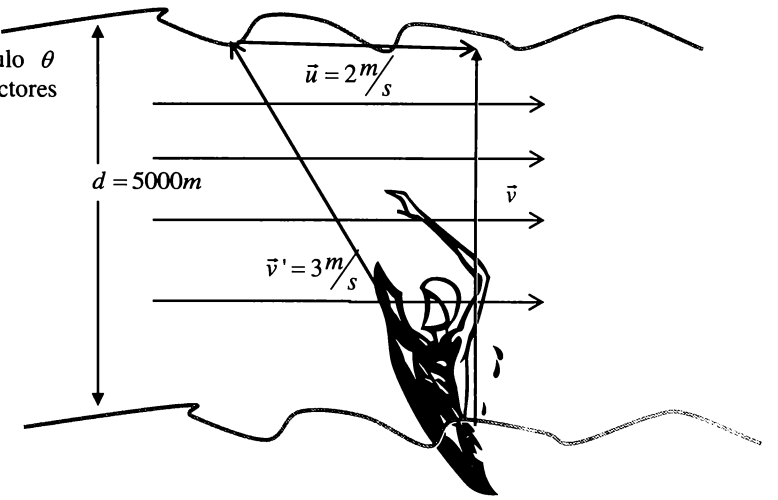


Figura. 4.21

b) ¿Cuál es la velocidad del nadador con respecto a la tierra?

$$v = \sqrt{v'^2 - u^2} = \sqrt{3^2 - 2^2}\ m/s = \sqrt{5}\ m/s$$

c) Si el ancho del río Guayas es aproximadamente 5000 m, determinar el tiempo que tarda el nadador en cruzar el río.

$$d = v \times t \qquad t = \frac{d}{v} \qquad t = \frac{5000m}{\sqrt{5}\ m/s} \qquad t = 2236s$$

ACTIVIDAD 4.11

Con relación al ejemplo 4.8. Si el nadador decide orientarse a favor de la corriente hasta un pueblo situado a 2000 m de distancia y luego regresar, se pide:

a) Calcular el tiempo que tarda en ir. Resp. : 400 s

b) Calcular el tiempo que tarda en regresar. Resp.: 2000 s

c) Calcular el tiempo total que tarda en ir y regresar. Resp: 2400 s

ACTIVIDAD 4.12

Andrés usa una escalera eléctrica en un centro comercial como se indica en la figura 4.22. Con las siguientes observaciones:

1.- Si Andrés usa la escalera eléctrica y sólo se deja llevar por la misma, tarda 30 s en llegar al siguiente piso.

2.- Si la escalera eléctrica NO funciona y Andrés camina en la misma, se demora 60 s en llegar al siguiente piso.

Con las observaciones mencionadas. **Calcular** el tiempo que tarda la persona en llegar al otro piso, si la persona camina y la escalera eléctrica está en funcionamiento. Resp.: 20 s

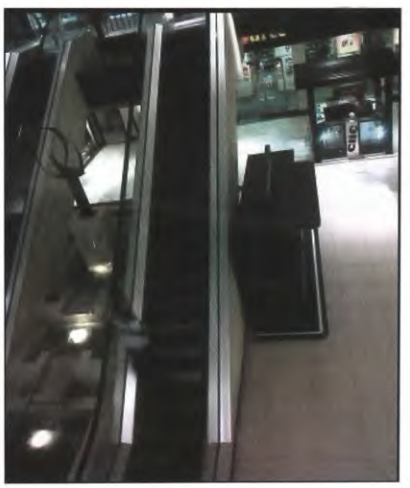


Figura. 4.22

ACTIVIDAD 4.13

Un mono viaja en el balde de una camioneta que se mueve a 60 km/h en una carretera larga y recta. El mono decide lanzar una banana con una rapidez de 20 km/h con respecto a la camioneta, en dirección opuesta al movimiento de la misma, entonces. Se pide:

a) Calcular la velocidad de la banana con respecto a Pedro, que está en la tierra a orilla de la carretera.

ACTIVIDAD 4.14

David trata de cruzar el río Daule que fluye a una rapidez u. Andrés lo espera justo al frente del punto de partida de David. David nada a una rapidez de 5 m/s y tiene que hacerlo con una orientación de 60^0 con respecto a la línea que une a David con Ancrés. Se pide:

a) Calcular la velocidad del río u. Resp.: 2.5 m/s

b) Si David tarda 5 minutos en cruzar el río Daule, ¿cuál es el ancho del río?

Resp.: 1299 m

ACTIVIDAD 4.15

Un avión de carga, tiene una rapidez de 20 m/s con respecto al aire, el piloto desea volar hacia el Sur. Si el avión se mueve en una zona donde la velocidad del viento es 10 m/s hacia el Oeste como se indica en la figura 4.22.

a) Determine la dirección a la que el piloto debe orientar el avión para lograr su objetivo. Resp.: 300^0

b) Determine la magnitud de la velocidad a la que el avión se mueve hacia el Sur.
Resp.: 17.3 m/s

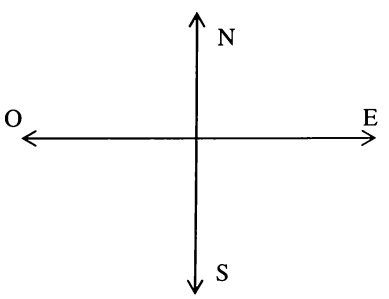


Figura. 4.22

PROBLEMAS

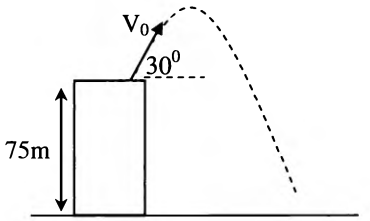
Usar g=10 m/s^2

1. Un niño hace girar una piedra atada a una cuerda de **0.40 m** en un plano vertical a rapidez constante, la mano que sujeta a la cuerda se encuentra a **1.2 m** del piso. Si la cuerda se rompe en el punto más bajo de la trayectoria circular y la piedra recorre una distancia horizontal de 1 m desde el lugar donde el niño se encuentra parado, ¿Cuál es la rapidez de la piedra cuando se encontraba en movimiento circular?

a) 50.00 m/s
b) 7.32 m/s
c) 25.00 m/s
d) 20.32 m/s

2. Si se lanza una piedra, con una velocidad inicial de 20 m/s y con 30^0 con respecto a la horizontal desde la terraza de un edificio de 75 m de altura, determine el tiempo que tarda la piedra en llegar al suelo.

a) 2.00 s
b) 4.00 s
c) 3.00 s
d) 5.00 s

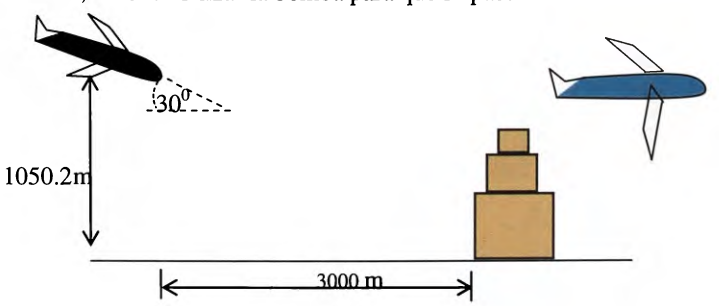


3. Un avión moviéndose horizontalmente a 30 m/s, suelta una maleta de provisiones a unos soldados en guerra La maleta resiste los impactos sin romperse hasta una rapidez de 70 m/s. Si un soldado en tierra toma el tiempo aproximado en el cual la maleta se mantuvo en el aire mediante pulsaciones en su muñeca , y éste fue de 6 s.

a) ¿La maleta sufrirá algún daño cuando impacta con el suelo?.
b) ¿Cuál debe ser la máxima altura a la que debe volar el avión respecto al suelo para que no sufra daño la maleta?

4. Un avión vuela en picada a un ángulo de 30^0 con respecto a la horizontal con una velocidad de 60 m/s y deja caer una bomba para destruir una de las bases enemigas. Si al momento de soltar la bomba el avión se encuentra a una distancia horizontal de 3000 m de la base y el avión se encuentra a una altura de 1050.2 m. Determinar:

a) Si la bomba impacta con la base enemiga.
b) Si en caso de no hacer impacto con la base, desde que distancia horizontal con respecto a ésta, se debe lanzar la bomba para que impacte con ella.



5. En un partido amistoso de fútbol entre Argentina y Brasil, los equipos estaban empatados 1 por 1 hasta el minuto 90 en el que el árbitro pita una falta a favor de Brasil. La falta ocurrió a 32 metros justo al frente del vertical izquierdo del equipo de Argentina. El encargado de cobrar la falta es Juninho y el arco tiene una altura de 2 m, Juninho le imparte una rapidez a la pelota de 30 m/s; la barrera de los argentinos tiene una altura promedio de 1,8 m y se encuentra a una distancia de 12 m desde donde se va a cobrar la falta. Determinar:

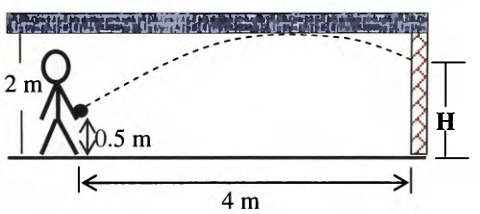
a) ¿Cuál debe ser la inclinación necesaria para que Juninho coloque el balón en la esquina superior izquierda sin que la barrera argentina obstruya el balón?
b) ¿Cuál debe ser la inclinación necesaria para que Juninho coloque el balón en la esquina inferior izquierda sin que la barrera argentina obstruya el balón?

6. Un cazador lanza una flecha a un blanco que se encuentra a 24 m desde el punto de lanzamiento y al mismo nivel. Si la flecha se lanza con una inclinación de 30^0, determine:

a) La rapidez inicial necesaria para que la flecha impacte en el blanco.
b) El tiempo que duró el recorrido de la flecha.

7. Una persona lanza una pelota desde una altura de 0.50 m, medida desde el suelo, contra una pared ubicada a 4 m de distancia como se muestra en la figura. Si la pared tiene una altura de 2 metros, entonces:

a) ¿Cuál será el máximo valor de la velocidad inicial para que **H** sea el máximo valor sin que la pelota impacte con el techo.
b) ¿Cuál es el valor máximo de la altura **H** medida desde el suelo?
c) ¿Cuál es el tiempo de vuelo?
d) ¿Cuál es la rapidez con que la pelota impacta contra la pared?



8.Se lanza una canica con velocidad inicial de V_0 y una inclinación de 60^0. Si otra canica se lanza con el doble de su velocidad y la mitad de su inclinación, determine:

a) ¿Cuál de las dos canicas tiene mayor alcance?
b) ¿Cuál es la relación del alcance de la canica 1 con la canica 2?
c) Pueden o no tener las canicas el mismo alcance. En caso de que si se puedan tener, ¿cuál debe ser el ángulo de inclinación de la segunda canica?
d) ¿Cuál de las dos canicas alcanza una mayor altura máxima?
e) ¿Cuál es la relación de las alturas máximas de la canica 1 con la canica 2?
f) Pueden o no tener las canicas la misma altura. En caso de que si se puedan tener, ¿cuál debe ser el ángulo de inclinación de la segunda canica?

9 ¿Cuál debe ser el ángulo de inclinación con el que debe ser lanzado un objeto para que la longitud de su altura máxima, sea igual al de la longitud de su desplazamiento horizontal?

a) 76.0^0
b) 60.0^0
c) 30.0^0
d) 45.0^0

10 Un CD que gira a 1800 RPM tiene diámetro de 20 cm. Se pide:

a) Determinar la frecuencia.

b) Determinar la rapidez angular.

c) El desplazamiento angular hasta los 10 s.

d) La magnitud de la máxima aceleración centrípeta que puede experimentar un punto del disco.

11 Una piedra de afilar herramientas de 30 cm de diámetro está acoplada concéntricamente con el eje de un motor eléctrico. Si un trabajador enciende el motor, el mismo que parte desde el reposo y a los 10 segundos alcanza una rapidez angular de 20 rad/s, en este tiempo, determine:

a) La aceleración angular de la piedra de afilar.

b) El desplazamiento angular de la piedra de afilar

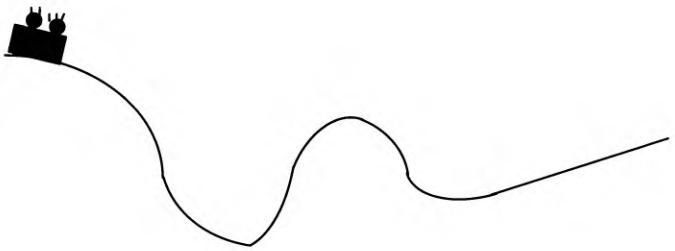
c) La rapidez tangencial de un punto ubicado en la periferia del disco.

d) La magnitud de la aceleración centrípeta de un punto de su periferia

e) La aceleración tangencial de un punto de su periferia

12 Un bote se dirige al Nor-Este a 20 m/s con respecto al río Guayas. Si la velocidad del río Guayas es 5 m/s de Sur a Norte. Se pide:

a) Determinar la magnitud de la velocidad del bote con respecto a un observador que está en la orilla de río.



DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

CAPÍTULO 5

INTRODUCCIÓN

Hasta este momento hemos estudiado cinemática, la parte de la mecánica que se refiere al movimiento sin importar las causas que lo producen. Se ha estudiado el movimiento de un móvil que se desplaza con rapidez constante, o con aceleración uniforme; la caída libre de los cuerpos y el movimiento en general. Nunca nos preguntamos la causa por la que los objetos se mueven o si están en movimiento, la causa por la que se detienen. Pero, ¿cuáles son las causas de que ocurra un movimiento? ¿Por qué los cuerpos se detienen rápida o lentamente cuando se deslizan sobre una superficie?. Para responder estas preguntas, es necesario introducir el concepto de fuerza y masa. A esta parte del movimiento se le denomina DINÁMICA. Se considerará el movimiento de objetos sin dimensiones aunque si con masa y a este capítulo se le denominará DINÁMICA DE LA PARTÍCULA.

Se considera el concepto de partícula como un cuerpo de dimensiones despreciables con respecto al entorno aunque tienen una masa definida. Por ejemplo un átomo puede considerarse como una partícula si estamos hablando de un cuerpo macroscópico. Un balón de fútbol puede considerarse como una partícula con respecto a una ciudad. La Tierra puede considerarse como una partícula respecto a la Vía Láctea.

Las leyes de Newton del movimiento explican estos conceptos mediante la primera ley de Newton o también llamada **Ley de Inercia**, en la que se indica que si la fuerza resultante sobre un objeto es cero, éste no cambiará su estado de movimiento o de reposo. En la **Segunda Ley** de Newton se expresa la relación entre la fuerza y la aceleración en la que esta última es diferente de cero. En la **Tercera Ley** de Newton se expresa las interacciones entre dos objetos ya sea que están en contacto o que están a distancia.

Se puede decir que existen dos tipos de fuerzas. Aquellas en las que hay contacto y en las que no hay contacto. En la figura *5.1* se muestran tipos de fuerza de contacto.

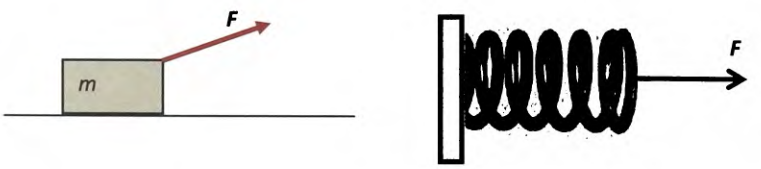
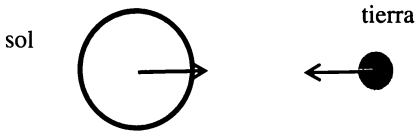


Figura 5.1

Ejemplos de fuerzas a distancia son las fuerzas que existen entre el sol y los planetas, entre dos cargas eléctricas. En general, la fuerza gravitacional existe entre dos masas de cualquier tamaño sin importar el tipo de material o la forma.

La fuerza gravitacional viene dada por: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ donde G es la constante de gravitación universal.

La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales q_1 y q_2 *está dada por*: $F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$ donde k está dada por $k = {}^{1}/_{4\pi\varepsilon_0}$ donde ε_0 es la permitividad del espacio vacío. En la figura *5.2* se muestran las fuerzas de acción a distancia.



Fuerza gravitacional entre el Sol y la Tierra

Fuerza eléctrica entre dos cargas de signo diferente.

Figura 5.2

5.1 PRIMERA LEY DE NEWTON

Suponga que se lanza un objeto sobre una superficie horizontal. El objeto se moverá cierta distancia y luego se detendrá. Si realizamos el mismo experimento pero esta vez la superficie es completamente lisa (fricción cero), el objeto no tendrá ninguna oposición y por lo tanto se mantendrá moviéndose con velocidad constante hasta que algún objeto en su camino lo detenga o cambie la dirección de su movimiento.
Si ahora le aplicamos al objeto una fuerza constante de igual magnitud que la fuerza de fricción entre la superficie y el objeto, éste se moverá con velocidad constante o se mantendrá en reposo, ya que la fuerza resultante es cero.

Si luego se aplica una fuerza constante sobre el objeto pero cuya magnitud sea mayor al de la fuerza de fricción entre el objeto y la superficie, entonces existirá una fuerza resultante diferente de cero, y el objeto tendrá aceleración.

Con estos ejemplos se concluye que si sobre un objeto no actúa ninguna fuerza neta, o si la fuerza resultante sobre ese objeto es cero, entonces éste se moverá con velocidad constante o se mantendrá en reposo. De esto se desprende la primera ley de Newton.

El enunciado de la primera ley de Newton es el siguiente: "Si la fuerza resultante que actúa sobre un objeto es cero, entonces éste estará en movimiento con velocidad constante (línea recta) o se mantendrá en reposo"

5.2 INERCIA

Si un objeto se encuentra en movimiento, su tendencia es a seguir moviéndose y si uno trata de detenerlo se debería aplicar una fuerza opuesta a su movimiento para detenerlo. Mientras mayor

masa tiene el objeto, más difícil será detenerlo o acelerarlo. Lo mismo ocurre si un objeto inicialmente se encuentra en reposo. El objeto presentará resistencia a iniciar el movimiento. La masa una medida cuantitativa de la inercia. Por ejemplo, un automóvil tiene más inercia que una bicicleta porque la masa del automóvil es mayor. Se define como inercia a "***la propiedad que tienen los cuerpos de resistirse a cambiar su estado de reposo o de movimiento con velocidad constante***".

El siguiente ejemplo muestra el papel de la inercia.

Sobre una mesa horizontal coloque una hoja de papel y sobre el papel coloque un objeto. Luego tire fuertemente del papel en dirección horizontal y el objeto ni siquiera se habrá movido. La inercia del objeto trata de mantenerlo en reposo ya que el tiempo en que se aplicó la fuerza fue sumamente pequeño.

Figura 5.3

En la figura *5.3* Kenneth tirará fuertemente del papel y la botella no se va a mover debido a su inercia. El papel saldrá dejando la botella en el mismo lugar.

Existe otro ejemplo que se encuentra en los lugares de diversiones (figura 5.4) Se trata de empujar un disco sobre una superficie horizontal la cual tiene pequeños agujeros por donde el aire sale hacia arriba. Por lo tanto, entre el disco y la mesa existe una capa de aire por lo que la fricción es despreciable. Cuando la niña empuja el disco, éste se moverá con velocidad constante hasta chocar con el borde que se halla en el extremo opuesto.

Figura 5.4

La mesa sobre la que se encuentra el disco rojo tiene pequeños agujeros por donde sale aire el cual hace levitar el disco y éste se puede trasladar sobre esta superficie horizontal casi sin fricción. En la foto, Melissa observa el movimiento del disco el cual viaja casi sin fricción.

5.3 SISTEMAS DE REFERENCIA

Cuando una persona está sentada dentro de un bus de pasajeros surge una pregunta. ¿Está la persona en reposo o en movimiento? La pregunta es ambigua, ya que la persona está en reposo con respecto al conductor pero al mismo tiempo está en movimiento con respecto a otra persona parada sobre carretera. Por lo tanto el reposo y el movimiento son relativos ya que se tiene que especificar si algo está en reposo o en movimiento con respecto a un sistema de referencia. En este caso, el bus es un sistema de referencia y para este sistema el pasajero está en reposo. Por otro lado, la carretera es otro sistema de referencia y para este sistema el pasajero está en movimiento. Por lo tanto, se puede definir un "sistema de referencia".

5.4 SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL Y NO INERCIAL

Se define un *sistema de referencia inercial* aquel que no tiene aceleración. La primera ley de Newton es aplicable solamente en sistemas de referencia inerciales. Se dice que el aula de clase, así como nuestra casa son sistemas de referencia inerciales porque están en reposo (aceleración cero), pero en realidad no lo son porque la Tierra se mueve alrededor del Sol y además gira sobre su propio eje. Sin embargo como la Tierra tarda 365 días en dar una vuelta al Sol y tarda 24 horas en dar una vuelta alrededor de su propio eje, este movimiento es casi imperceptible por lo tanto el aula de clase o nuestra casa pueden ser considerados sistemas de referencia inerciales.

Un pasajero que viaja en un avión el cual vuela horizontalmente y con velocidad constante, afirmará que su aceleración es cero, lo cual es correcto. El pasajero puede llenar un vaso con agua y a pesar que el avión se mueve a 900 km/h, el agua no se regará. Pero, si el avión acelera, se frena o gira en cualquier dirección el agua se regará del vaso. Las leyes de la Física se cumplen por igual en todos los sistemas de referencia inerciales. Cuando un sistema de referencia tiene aceleración (cambio de la velocidad) se dice que es un *sistema de referencia no inercial.* La primera ley de Newton no es aplicable en sistemas de referencia no inerciales. De acuerdo a la primera ley de Newton, si un cuerpo se encuentra en reposo o se mueve con velocidad constante son movimientos equivalentes.

Supongamos que estamos volando en un avión el mismo que se mueve horizontalmente y con velocidad constante. Ningún pasajero del avión notará que se está moviendo, además si alguna persona dentro de la nave realiza un pequeño experimento de lanzar verticalmente una manzana hacia arriba, el tiempo de subida y de bajada de la manzana será igual al tiempo que se mediría en el laboratorio.

Si una persona está sentada en el asiento de un avión, la persona no experimentará ninguna fuerza sobre su espalda realizada por el espaldar del asiento ya que su movimiento es con velocidad constante. De existir una fuerza hacia adelante realizada por el espaldar del asiento sobre la espalda del pasajero, entonces, al existir una fuerza neta sobre la persona, ésta tendría aceleración. Este sistema de referencia en el que existe aceleración se denomina sistema de referencia no inercial. Así, todo sistema de referencia no inercial tendrá aceleración diferente de

cero. Por ejemplo, si viajamos en un carro que está acelerando, sentiremos fuerzas denominadas ficticias que se presentan en los sistemas de referencia no inerciales.

Usted debe haber experimentado que cuando un carro acelera los pasajeros tienden a irse hacia atrás y que cuando el carro frena la tendencia es de irse hacia adelante. Como el sistema de referencia (el carro) está acelerado aparecen estas fuerzas ficticias qué hace que las personas se muevan hacia atrás o hacia adelante.

En conclusión, la primera ley de Newton implica: $F_{resultnte} = \sum F = 0$

Se deja al lector que indique si los siguientes ejemplos son sistemas de referencia inerciales o no inerciales.

a) Un carro que acelera.
b) Un carro que está virando la esquina.
c) Un carro que está en reposo.
d) Un carro que está bajando por una pendiente con velocidad constante.
e) Una nave espacial que gira alrededor de la Tierra.
f) Un helicóptero que se eleva verticalmente con velocidad constante.

5.5 MASA

Cuando una persona empuja un bloque de masa m, el cual se encuentra sobre una superficie horizontal sin fricción, el bloque se desliza con una aceleración $\boldsymbol{a}$. Si la fuerza que ejerce la persona se duplica, el bloque se deslizará con el doble de la aceleración, esto es: $2a$. Se observa que para aumentar la aceleración de a a $2a$ se requiere duplicar la fuerza. Entonces, si la masa del bloque aumenta, la fuerza también debe aumentar, es decir se hace más difícil tratar de aumentar la aceleración del bloque. Por lo tanto se dice que es la inercia la que impide acelerar el bloque, así que a mayor masa se tiene mayor inercia.

Si un objeto de masa m_1 adquiere una aceleración a_1 al aplicarle una fuerza $\boldsymbol{F}$, y un objeto de masa m_2 adquiere una aceleración a_2 al aplicarle la misma fuerza $\boldsymbol{F}$, implica que se cumple la relación:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \qquad (5.1)$$

Es decir, se cumple una relación inversa entre las masas y las aceleraciones bajo la aplicación de una misma fuerza $\vec{F}$. Sin embargo, la masa y el peso son cantidades físicas completamente diferentes. Una diferencia es que la masa es una cantidad escalar y el peso es una cantidad vectorial.

Suponga que un bloque de acero de 0.5 kg. que se mueve a una velocidad constante de $1km/h$ se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción, una persona no tendrá mayor dificultad para

detener el movimiento del bloque. Si es fácil detener el bloque es debido a que su inercia es pequeña. Si por otro lado un bloque de acero de 100 *kg* se mueve con una velocidad constante de *1km/h*, será demasiado difícil que una persona pueda detenerlo debido a que su inercia es grande. Así, la masa es una propiedad que tienen los cuerpos para determinar la inercia que tienen los objetos. Si un cuerpo se encuentra en reposo, será fácil o difícil empezar a moverlo dependiendo de su inercia. Si la masa es grande, su inercia será grande y si la masa es pequeña su inercia será pequeña.

El peso se define como la atracción que la Tierra ejerce sobre un cuerpo. $\boldsymbol{W} = m\boldsymbol{g}$ donde m es la masa y g la aceleración de la gravedad. El peso, por lo tanto, es una fuerza dirigida hacia el centro de la Tierra.

Como el peso depende del valor de la aceleración de la gravedad, un objeto de 2.0 *kg* de masa pesa en la superficie de la Tierra a nivel del mar $w = 2.0kg \times 10\frac{m}{s^2} = 20\ N$ donde N es la unidad de fuerza en el Sistema Internacional de Unidades (SI). Ese mismo objeto en la cima de una montaña pesará una cantidad menor a *20 N* porque el valor de la aceleración de la gravedad es menor conforme nos alejamos del centro de la Tierra. Aquel objeto de 2.0 *kg* si lo pesamos en la Luna, pesará $w = 2.0kg \times 1.63 = 3.26N$ debido a que la aceleración de la gravedad en la Luna es de aproximadamente *1/6* del de la Tierra. Es decir, un cuerpo que en la Tierra pesa *20* N, en la Luna sólo pesa *3.26N*.

Vale la pena describir la unidad de fuerza en el S.I. el Newton (N) se define como:

$$1N = kg\frac{m}{s^2} \qquad (5.2)$$

En palabras: el Newton es la fuerza que se le debe aplicar a una masa de *1kg* para que se acelere a $1m/s^2$.

Si nos encontramos en algún lugar del Universo muy lejos de cualquier cuerpo celeste, se puede afirmar que la atracción que pueda ejercer algún planeta o estrella sobre un objeto es casi cero, por lo tanto el peso de ese objeto será cero. A pesar de que el peso depende del valor de la aceleración de la gravedad, la *masa* es constante en todos los sitios del universo independientemente de si está en movimiento o en reposo. La masa no depende del valor de la gravedad. Todo esto es válido a velocidades pequeñas con respecto a la velocidad de la luz. En capítulos posteriores se explicará el cambio de la masa cuando la velocidad es cercana a la velocidad de la luz.

Ejemplo 5.1

Calcule la magnitud y dirección de la fuerza resultante al aplicar al disco de la figura las fuerzas $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{Q}$ mostradas en la figura 5.5. Suponga que el disco se mueve sobre una superficie horizontal y sin fricción y que el ángulo θ es igual a 60^0. Luego calcule magnitud y dirección de la aceleración si la masa del disco es de 2.0 kg. $Sen60^0 = 0.866;\quad cos60^0 = 0.5$

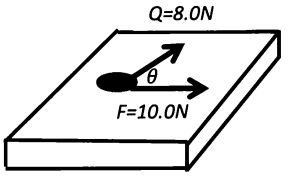


Figura 5.5

Aplicando la descomposición rectangular:

$$\sum F_y = Qsen\theta = 8.0N \times sen60^0 = 6.9N$$

$$\sum F_x = Qcos\theta + F = 8.0Ncos60^0 + 10.0N = 14.0\text{N}$$

$$F_{result} = \sqrt{(14.0N)^2 + (6.9N)^2} = 15.6N$$

Para calcular la aceleración resultante, se puede calcular a_x y luego a_y.

Sumatoria de fuerzas en x es igual al producto de la masa por la aceleración en x.

$$14.0N = 2.0kg \times a_x \qquad a_x = \frac{14.0N}{2.0kg} = 7.0\frac{m}{s^2}$$

De la misma manera, se puede calcular la aceleración en y mediante la sumatoria de fuerzas en y e igualando al producto de la masa por la aceleración a_y.

$$6.9N = 2.0kg \times a_y \qquad a_y = \frac{6.9N}{2.0kg} = 3.45\frac{m}{s^2}$$

Por lo tanto, la aceleración resultante es: $a_{resul} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ *(5.3)*

$$a_{resul} = \sqrt{\left(7.0\frac{m}{s^2}\right)^2 + \left(3.45\frac{m}{s^2}\right)^2} = 7.8\frac{m}{s^2}$$

Una vez que se ha calculado la fuerza resultante, es posible, a través de este resultado, calcular la aceleración resultante de una manera más rápida. El valor que obtuvimos de la fuerza resultante fue de 15.6N:

$$15.6N = 2.0kg \times a_{resul} \qquad a_{resul} = \frac{15.6N}{2.0kg.} \qquad a_{resul} = 7.8\frac{m}{s^2}$$

Se observa que el resultado es exactamente el mismo.

La aceleración resultante y la fuerza resultante siempre tendrán la misma dirección. Sin embargo es incorrecto afirmar que la velocidad de la partícula tiene la misma dirección que la fuerza resultante o aceleración resultante.

$$\propto = tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{3.45}{7.0}\right) = 26.2^0$$

$$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{\sum F_y}{\sum F_x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{6.9}{14.0}\right) = 26.2^0$$

Se observa que el resultado obtenido es el mismo.

Ejemplo 5.2

Mediante 3 cables se sostiene un bloque de 100 kg. Calcule las tensiones en los 3 cables. $cos40^0 = 0.766;\ sen40^0 = 0.643;\ sen60^0 = 0.866;\ cos60^0 = 0.5$

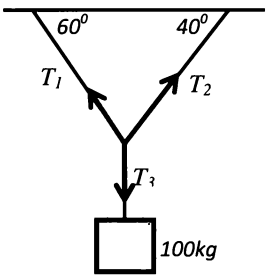
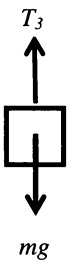


Figura 5.6



$$\sum F_y = 0$$

$$T_3 = mg$$

$$T_3 = 100kg \times 10\frac{m}{s^2}$$

$$T_3 = 1000N$$

Figura 5.7

Se observa que el bloque está en reposo, por lo tanto la suma de todas las fuerzas debe ser igual a cero.

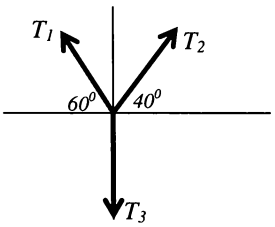


Figura 5.8

$$\sum F_x = T_2 cos40^0 - T_1 cos60^0 = 0$$

$$T_2 = \frac{T_1 cos60^0}{cos40^0} \qquad (5.4)$$

$$\sum F_y = T_1 sen60^0 + T_2 sen40^0 - T_3 = 0$$

$$T_1 sen60^0 + \frac{T_1 cos60^0}{cos40^0} \times sen40^0 = mg$$

$$T_1\left(sen60^0 + \frac{sen40^0}{cos40^0} \times cos60^0\right) = mg; \qquad T_1 = \frac{100kg \times 10\frac{m}{s^2}}{sen60^0 + \frac{sen40^0}{cos40^0} \times cos60^0}$$

$$T_1 \doteq 777.9N$$

Para hallar T_2 se utiliza la ecuación *(5.4)*:

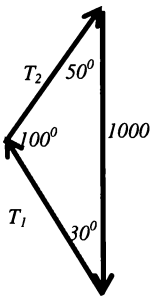
$$T_2 = \frac{T_1 cos60^0}{cos40^0} = \frac{777.9N cos60^0}{cos40^0}$$

$$T_2 = 507.7N$$

Las tensiones encontradas son: $T_1 = 777.9N;\ T_2 = 507.7N;\ T_3 = 1000N$

El ejemplo anterior se puede resolver por un método más rápido aplicando el concepto de que "si tres vectores mantiene en equilibrio a un cuerpo, esas fuerzas tienen que formar un triángulo".

El lector puede comprobar los ángulos internos del triángulo de la figura 5.9



Aplicando la ley del seno:

$$\frac{1000N}{sen100^0} = \frac{T_1}{sen50^0} \qquad T_1 = 777.9N$$

$$\frac{1000N}{sen100^0} = \frac{T_2}{sen30^0} \qquad T_2 = 507.7N$$

Figura 5.9

Como puede apreciar el lector este método es muy sencillo pero sólo es válido cuando 3 vectores mantienen en equilibrio a un cuerpo. Si existiera una cuarta cuerda el método del triángulo no sería válido y tendría que resolverlos por el método de las componentes.

5.6 SEGUNDA LEY DE NEWTON

En el estudio de la primera ley de Newton se usó el hecho de que la sumatoria de las fuerzas o la fuerza neta es igual a cero. Esto implicaba objetos moviéndose en línea recta y con velocidad constante (esta velocidad puede ser cero). Ahora supondremos que la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es diferente de cero. Se observa entonces que el cuerpo va a tener aceleración y se cumple que la dirección de la fuerza es la misma que la de la aceleración. También se observa que si la fuerza se duplica, la aceleración también se duplica y que si la fuerza se triplica la aceleración también se triplica. Esto se cumple si la masa del cuerpo se mantiene constante.

Para llegar a la relación entre la fuerza, la masa y la aceleración, Newton definió el término conocido como ***momentum*** o ***cantidad de movimiento lineal*** $\vec{p}$.

Se define el vector ***p*** llamado *momentum* o *cantidad de movimiento* como el producto *mv* donde *m* es la masa y *v* es la velocidad.

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{5.5}$$

Se define *fuerza* como la rapidez de variación de la cantidad de movimiento lineal de una partícula:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t}$$

Si la masa es constante: $\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ y reconociendo que $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ es la aceleración de la partícula se tiene:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{5.6}$$

La cual se conoce como **segunda ley de Newton**

Como sobre una partícula pueden estar actuando varias fuerzas, $\overrightarrow{F}$ representa la fuerza neta o la fuerza resultante actuando sobre la partícula.

$\sum\vec{F} = m\vec{a}$ donde la sumatoria de fuerzas representa la fuerza neta.

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z \tag{5.7}$$

Ejemplo 5.3

Un bloque de 10.0 *kg* de masa es arrastrado horizontalmente hacia la derecha sobre una superficie sin rozamiento mediante una fuerza de 20.0N que forma un ángulo de 60^0 con la horizontal. Calcule la aceleración del bloque. $cos60^0 = 0.5$

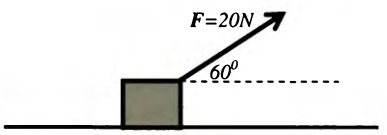


Figura 5.10

La fuerza que produce una aceleración hacia la derecha es la componente de la fuerza en dirección +*x*.

La componente $F_x = 20.0Ncos60^0 = 10.0N$

$$F_x = ma_x \qquad a_x = \frac{F_x}{m} \qquad a_x = \frac{10.0N}{10.0kg} \qquad a_x = 1.0\frac{m}{s^2}$$

Esta es la aceleración total del bloque ya que $a_y = 0$.

Ejemplo 5.4

De acuerdo al ejemplo 5.1 se encontró que la fuerza resultante sobre el disco fue de *15.6N*. Si el disco es reemplazado por otro de 20.0 *kg*, ¿cuál sería su aceleración?

$\sum F = ma \quad a = \frac{\sum F}{m} \quad a = \frac{15.6N}{20.0kg} \quad a = 0.780\frac{m}{s^2}$ la cual es 10 veces menor a la aceleración encontrada en el ejemplo 5.1.

Ejemplo 5.5

Suponga que un bloque que se mueve en la dirección positiva del eje de las *x* va disminuyendo su velocidad paulatinamente hasta detenerse. ¿Qué se puede deducir acerca de la fuerza en este movimiento?

Solución:

Esto quiere decir que la fuerza resultante que actúa sobre el bloque tiene una dirección opuesta a la del movimiento. Esta fuerza podría ser la fricción que estaría dirigida hacia la izquierda así como su aceleración.

5.7 TERCERA LEY DE NEWTON

El enunciado de la tercera ley de Newton o Ley de Acción y Reacción es el siguiente: "Si un cuerpo *A* ejerce una fuerza sobre otro cuerpo *B*, éste ejercerá una fuerza sobre el cuerpo *A* de igual magnitud y dirección opuesta".

Si una persona trata de empujar una pared con una fuerza $\vec{F}$, la pared ejercerá sobre la persona una fuerza $-\vec{F}$. Al introducir el signo menos implica que su dirección es opuesta.

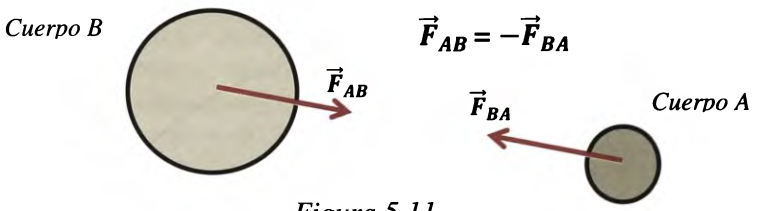


Figura 5.11

El cuerpo *A* ejerce una fuerza sobre el cuerpo *B* (F_{AB}). El cuerpo *B* ejerce una fuerza sobre el cuerpo *A* (F_{BA}). Estas dos fuerzas son de igual magnitud y dirección opuesta.

En el caso de la atracción de masas de acuerdo a la ley de gravitación universal, es bien conocido que si la Tierra atrae a la Luna, ésta atrae a la Tierra con fuerzas que son de igual magnitud y dirección opuesta. Entonces surge la pregunta: ¿Por qué la Luna no ha chocado con la Tierra? Se deja al lector analizar esta pregunta.

Se debe tener en cuenta que la fuerza de acción y de reacción nunca actúa sobre el mismo cuerpo. Es decir, este par de fuerzas no pueden mantener en reposo a un objeto.

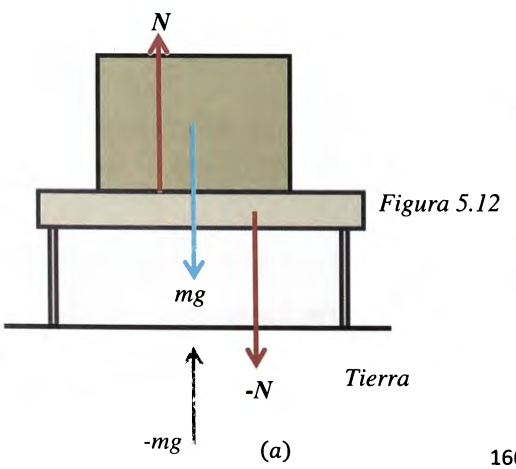
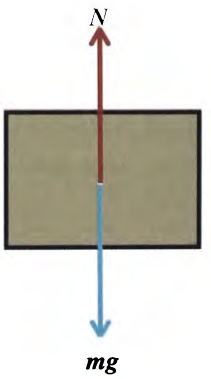


Figura 5.12



$$\sum F_y = 0$$

$$N - mg = 0$$

$$N = mg$$

En la figura *5.12 (a)* se muestra un diagrama de fuerzas entre una mesa y una caja que se halla sobre ella. La Tierra atrae a la caja con una fuerza que es igual a su peso ***mg*** (acción) y por lo tanto la caja atrae a la Tierra con una fuerza ***–mg*** (reacción). Por otro lado, la mesa empuja a la caja con una fuerza ***N*** (acción) y la caja ejerce una fuerza sobre la mesa ***–N***. Los vectores de igual color son un par acción –reacción. En la figura 5.12 (b) se puede observar que las fuerzas que actúan sobre la caja son de diferente color, por lo tanto ellas no representan un par acción-reacción.

5.8 DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Es un diagrama en el que se representan todas las fuerzas que los otros cuerpos ejercen sobre el cuerpo cuyo diagrama de cuerpo libre se está realizando. Por ejemplo, en la figura *5.12 (b)* la caja interactúa con la mesa y con la Tierra. Así, la mesa es responsable de que sobre la caja aparezca la fuerza normal *(N)* dirigida hacia arriba. La interacción con la Tierra da como lugar la atracción que ésta ejerce sobre la caja denominada peso *(mg)* dirigida hacia abajo. Por lo tanto sobre la caja sólo actúan dos fuerzas las mismas que no son un par acción-reacción. Es más, al estar la caja en reposo, la normal debe ser igual al peso de modo que la suma de todas las fuerzas sea igual a cero.

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE UNA CAJA HALADA POR UNA FUERZA.

Figura 5.13

En la figura *5.13 (a)* se muestra un bloque de masa *m* que es arrastrado por una fuerza $\vec{F}$ sobre una superficie horizontal sin fricción.

En la figura *5.13 (b)* se ha graficado todas las fuerzas que interactúan con el bloque. Por ejemplo, la fuerza *mg* es aquella que la Tierra ejerce sobre el bloque. La normal *N*, es la fuerza que la superficie horizontal ejerce sobre el bloque, sosteniéndolo. La fuerza *F* ha sido descompuesta en sus dos componentes ortogonales, esto es en $Fcos\theta$ y $Fsen\theta$. Observe que todas las fuerzas

tienen direcciones a lo largo del eje de las x o a lo largo del eje de las y. Ya que el bloque no se mueve verticalmente, implica que la sumatoria de todas las fuerzas que actúan a lo largo del eje de las y debe ser igual a cero.

$$\sum F_y = 0 \qquad N + Fsen\theta - mg = 0$$

La fuerzas N y $Fsen\theta$ están dirigidas hacia arriba por lo tanto tienen signo positivo, mientras que la fuerza mg que está dirigida hacia abajo tiene signo negativo.

A lo largo del eje de las x sólo existe una fuerza dirigida hacia la derecha. Esto implica que esa fuerza va a provocar una aceleración sobre el bloque. Como la fuerza resultante sobre el eje de las x está dirigida hacia la derecha, la aceleración también estará dirigida hacia la derecha. De hecho, la fuerza resultante es igual a $Fcos\theta$. De acuerdo a la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = ma \qquad Fcos\theta = ma \qquad a = \frac{Fcos\theta}{m}$$

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRO DE UN BLOQUE EMPUJADO POR UNA FUERZA.

Realice el diagrama de cuerpo libre del cuerpo mostrado en la figura. Descomponga las fuerzas en componentes a lo largo de los ejes x y y.

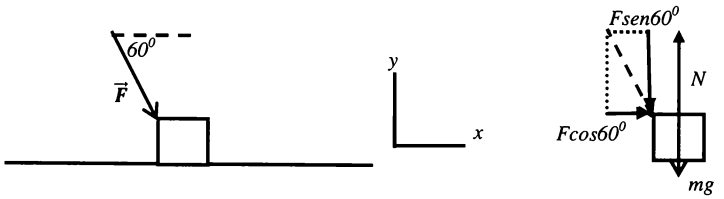


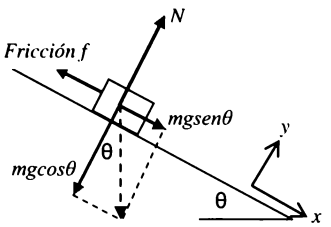
Figura 5.14

Se ha graficado las fuerzas que realizan los cuerpos con los que interactúa el bloque. Este interactúa con la Tierra, con la superficie horizontal y con la fuerza F. La fuerza F es descompuesta en sus componentes ortogonales $Fsen60^0$ y $Fcos60^0$. Debido a la interacción con la Tierra se tiene la fuerza mg dirigida verticalmente hacia abajo. La Normal es la reacción que la superficie horizontal ejerce sobre el bloque. Observe que las fuerzas que se grafican en el diagrama de cuerpo libre son todas aquellas que actúan sobre el bloque. Nunca se deben graficar las fuerzas que el bloque ejerce sobre su entorno. Si la fuerza aplicada es igual a $20.0\ N$ y la masa es igual a $5kg$, se deja al lector que calcule la aceleración del bloque. Resp. $2\ ^m/_{s^2}$

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE UN BLOQUE SOBRE UN PLANO INCLINADO.

En el caso de que un cuerpo se encuentre sobre un plano inclinado, normalmente las fuerzas son descompuestas tomando el eje x *paralelo* a la superficie del plano inclinado y el eje y

perpendicular a x. En el siguiente ejemplo se ilustra esta situación. *Considere que el cuerpo se encuentra en reposo.*



Como el cuerpo está en reposo, debe cumplirse que la suma de todas las fuerzas debe ser igual a cero. Se ha añadido la fuerza de fricción para que el cuerpo no deslice a lo largo de la superficie del plano inclinado.

Figura 5.15

Para que el cuerpo esté en reposo, se debe cumplir que la sumatoria de fuerzas a lo largo del eje de las y debe ser igual a cero y que la sumatoria de las fuerzas a lo largo del eje de las x también debe ser igual a cero. Esto es:

$$\sum F_y = 0 \qquad N - mgcos\theta = 0 \qquad N = mgcos\theta$$

$$\sum F_x = 0 \qquad mgsen\theta - f = 0 \qquad f = mgsen\theta$$

No siempre se cumple que la normal es igual a $mgcos\theta$ ni tampoco que en todos los casos la fuerza de fricción es igual a $mgsen\theta$.

CÁLCULO DE LA ACELERACIÓN DE UN BLOQUE QUE DESLIZA SOBRE UN PLANO INCLINADO SIN FRICCIÓN

Ahora se va a suponer que el plano inclinado de la figura *5.15* es liso (sin fricción). En este caso se debe eliminar la fuerza de fricción del diagrama de cuerpo libre y, por lo tanto, a lo largo del eje de las x quedará una sola fuerza la que provocará en el bloque una aceleración hacia abajo y a lo largo del plano inclinado. La única fuerza que queda a lo largo del eje positivo de las x es: $mgsen\theta$. Esta fuerza es la responsable de la aceleración del bloque.

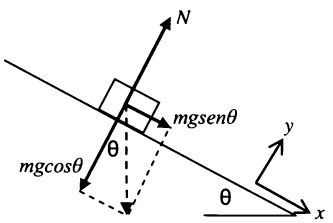


Figura 5.16

De acuerdo a la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = ma \qquad mgsen\theta = ma \qquad a = gsen\theta \tag{5.8}$$

Esta última expresión indica que la aceleración de un objeto que desliza sobre un plano inclinado liso no depende de la masa sino solamente de la inclinación del plano. Es decir, si soltamos desde lo alto de un plano inclinado dos objetos de diferente masa, éstos llegarán a la base del plano al mismo tiempo. Esto es válido solamente si el plano es liso, es decir, que no exista fricción.

Ejemplo 5.6

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE DOS BLOQUES EN CONTACTO EMPUJADOS POR UNA FUERZA.

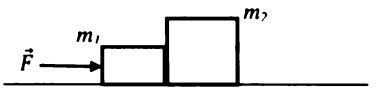


Figura 5.17

De acuerdo a la tercera ley de Newton el bloque m_1 ejerce una fuerza sobre el bloque m_2 y el bloque m_2 ejerce una fuerza de igual magnitud y dirección opuesta sobre el bloque m_1. Por lo tanto, el diagrama de cuerpo libre de los bloques m_1 y m_2 es:

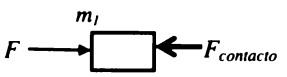


Figura 5.18 (a)

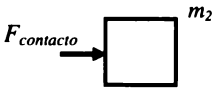


Figura 5.18 (b)

Observe que sobre el bloque m_1, en la figura *5.18 (a)*, actúa la fuerza externa F y la fuerza $F_{contacto}$ que es la fuerza que el bloque m_2 ejerce sobre el bloque m_1. Si la superficie es sin fricción, los bloques m_1 y m_2 tendrán una aceleración hacia la derecha de igual magnitud.

Para el bloque m_1: $\sum F_x = m_1 a \qquad F - F_{contacto} = m_1 a$

Para el bloque m_2: $\sum F_x = m_2 a \qquad F_{contacto} = m_2 a$

Sumando las dos últimas ecuaciones, se observa que se cancela la fuerza de contacto y queda:
$F = m_1 a + m_2 a \qquad F = (m_1 + m_2)a$

y despejando la aceleración: $a = \frac{F}{m_1 + m_2}$ *(5.9)*

Debe notarse que la fuerza de contacto actúa hacia la izquierda sobre el bloque m_1 y hacia la derecha sobre el bloque m_2, esto se debe a la tercera ley de Newton.

Otra forma de resolver el problema anterior es considerando a los bloques m_1 y m_2 como un sistema. Es decir, que existe un solo bloque cuya masa es (m_1+m_2) y que sobre este gran bloque se aplica la fuerza externa F. El diagrama de cuerpo libre correspondiente quedaría de la siguiente forma:

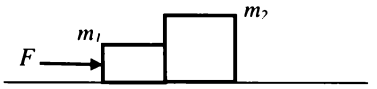


Figura 5.19

En este diagrama de cuerpo libre no aparece la fuerza de contacto porque son fuerzas internas y se cancelan mutuamente.

La ecuación sería: $\sum F_x = (m_1 + m_2)a \qquad F = (m_1 + m_2)a$

y despejando la aceleración queda: $a = \frac{F}{m_1+m_2}$ que corresponde al mismo resultando encontrado en la ecuación (5.9).

CALCULO DE LA FUERZA DE CONTACTO.

Un estudiante pregunta a su profesor ¿cuál es el valor de la fuerza de contacto? Para eso debemos trabajar con uno de los bloques, por ejemplo tomemos el bloque m_2:

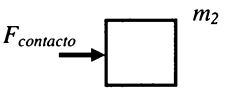


Figura 5.20

Sobre el bloque m_2 solamente actúa la fuerza de contacto y es la responsable de que el bloque acelere hacia la derecha. Su aceleración ya fue calculada anteriormente y es: $a = \frac{F}{m_1+m_2}$

Por lo tanto: $\sum F_x = m_2 a \qquad F_{contacto} = m_2 \frac{F}{m_1+m_2}$

$$F_{contacto} = \frac{m_2}{(m_1+m_2)} F \qquad (5.10)$$

Se observa que la fuerza de contacto que actúa sobre el bloque m_2 es menor que la fuerza externa F. Y debe ser así porque la fuerza de contacto acelera sólo el bloque m_2 mientras que la fuerza externa F acelera una masa mayor que es $(m_1 + m_2)$.

Se deja al lector que calcule la fuerza de contacto usando el bloque m_1. El resultado debe ser el mismo que el encontrado en la ecuación *(5.10)*

Si en lugar de aplicar la fuerza externa sobre el bloque de masa m_1 y hacia la derecha se aplicara sobre el bloque m_2 y hacia la izquierda, *el valor de la aceleración no cambia* pero *si cambia el valor de la fuerza de contacto.* En uno de los ejercicios propuestos se pide que calcule este problema pero con datos de las masas y de la fuerza externa.

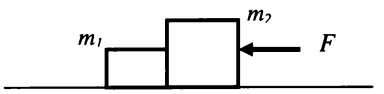


Figura 5.21

$$\sum F = (m_1 + m_2)a \qquad F = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Se observa que la aceleración no cambia ya que es idéntica a la ecuación *(5.9).*

Ejemplo 5.7

PESO APARENTE EN UN ASCENSOR

Se va a suponer que un hombre de 70 kg se para sobre una balanza la cual reposa sobre el piso de un ascensor. Si el ascensor está en reposo o se mueve con velocidad constante, ya sea hacia arriba o hacia abajo, la balanza marcará su verdadero peso, es decir *mg.* En cada uno de siguientes casos calcule el valor que marca la balanza.

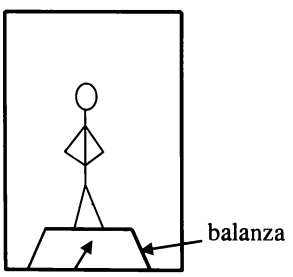
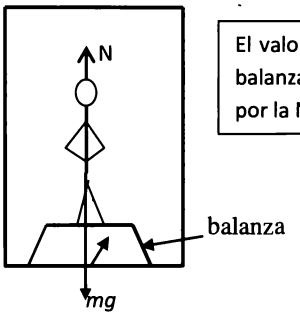


Figura 5.22



El valor que marca la balanza está dado por la Normal.

Figura 5.23

a) El ascensor está en reposo:

La balanza marca $N = mg = 70kg \times 10\frac{m}{s^2}$ $\quad N = 700\ N$

b) El ascensor se mueve hacia arriba con velocidad constante:

Un movimiento con velocidad constante implica que la aceleración es igual a cero.

Así: $\sum F_y = 0 \qquad N - mg = 0 \qquad N = mg \qquad N = 700\ N$

c) El ascensor se mueve hacia abajo con velocidad constante.
Como en el caso anterior, la sumatoria de fuerzas es igual a cero, es decir la balanza marcará 700 *N*.

d) El ascensor tiene una aceleración de 1m/s^2 hacia arriba.

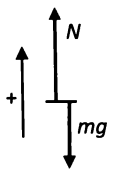


Figura 5.24

Como el ascensor acelera hacia arriba, la fuerza Normal va a ser mayor que el peso del hombre. Como la Normal es la que indica lo que marca la balanza, el peso aparente del hombre será mayor que 700 *N*.

Así: $\uparrow \sum F = ma \qquad N - mg = ma \qquad N = m(g + a)$ esta última ecuación indica que el valor que marca la balanza (*N*) es mayor que el peso real (*mg*).

Por lo tanto: $N = 70kg(10 + 1)\frac{m}{s^2} \qquad N = 770\ N.$

e) El ascensor se mueve hacia abajo y desacelera con $a = 1m/s^2$.

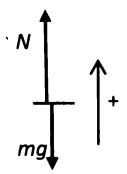


Figura 5.25

En este caso el ascensor que estaba bajando con velocidad constante, empieza a frenarse, por lo tanto el valor de la Normal (lo que marca la balanza) será mayor al peso real de la persona (*mg*).

Así: $\uparrow \sum F = ma \qquad N - mg = ma \qquad N = m(g + a)$

$N = 70kg(10 + 1)\frac{m}{s^2} \qquad N = 770\ N.$ Este valor es mayor que el peso real del hombre. De hecho, el hombre se siente pesado mientras el ascensor se está frenando.

En el caso de que el ascensor esté descendiendo con una aceleración igual a la aceleración de la gravedad, el hombre parado sobre la balanza observará que ésta marca cero. En este caso el hombre y la balanza aceleran hacia abajo a 10 m/s^2. Usted en estas circunstancias flotaría en el

espacio del ascensor y este estado es de **ingravidez**. ¿Qué sentirán los astronautas mientras flotan en el espacio?

Ejemplo 5.8

MÁQUINA DE ATWOOD

Se denomina como máquina de Atwood al arreglo que se muestra en la figura *5.26* que consiste de una polea sin masa y sin fricción por la que pasa una cuerda de masa despreciable y de cada extremo se cuelgan dos objetos de masas diferentes. Se trata de determinar la aceleración de las masas cuando son soltadas desde el reposo. Suponga que $m_1 > m_2$.

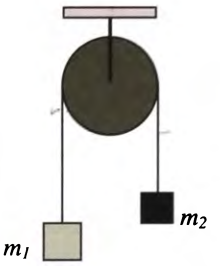


Figura 5.26

En las figuras *5.27* y *5.28* constan los diagramas de cuerpo libre de los dos bloques donde se observa que el bloque m_1 baja y que el bloque m_2 sube. Como la cuerda no se puede estirar, las aceleraciones de los dos bloques deben ser iguales en magnitud pero en direcciones diferentes.

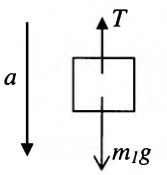


Figura 5.27

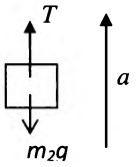


Figura 5.28

De los diagramas de cuerpo libre, se observa que las tensiones sobre los dos bloques son iguales. Esto sucede en el caso ideal ya que se considera que la polea tiene masa despreciable y que además no hay fricción en su eje. También se supone que la cuerda que une los bloques tiene masa despreciable.

Si el bloque m_1 tiene mayor masa que el bloque m_2, el primero se moverá hacia abajo mientras que el segundo lo hará hacia arriba con la misma magnitud de la aceleración. Por lo tanto se debe realizar la sumatoria de las fuerzas que actúan sobre m_1 e igualar al producto de su masa por su aceleración.

Así: $\sum F = m_1 a \qquad m_1 g - T = m_1 a$ Ecuación A

Para el bloque m_2 se realiza algo similar, es decir que la sumatoria de las fuerzas que actúan sobre él es igual al producto de su masa por su aceleración, sabiendo que la magnitud de la aceleración para los dos bloques es la misma.

Así: $\sum F = m_2 a \qquad T - m_2 g = m_2 a$ Ecuación B

De las dos ecuaciones anteriores (A) y (B), las incógnitas son la tensión T y la aceleración a. Como el objetivo es hallar la aceleración, se debe eliminar la tensión. Sumando las dos ecuaciones A y B se observa que se cancela la tensión en la cuerda.

Sumando A+B: $m_1 g - m_2 g = m_1 a + m_2 a$

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a$$

Despejando la aceleración: $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$ *(5.11)*

De este resultado se puede observar que si las masas son iguales, el numerador de la aceleración se vuelve cero y por lo tanto la aceleración sería cero.

Para el ejemplo de la máquina de Atwood, se nota que la masa m_1 se encuentra por debajo de la masa m_2. Suponga que las masas son soltadas desde el reposo. ¿Cuál sería el movimiento inicial de los cuerpos si la masa de la cuerda no es despreciable y las masas de los objetos son iguales? Se deja al lector analizar este caso.

Ejemplo 5.9

Dos bloques de masas $m_1 = 2.0\ kg$ y $m_2 = 4.0\ kg$ están unidas mediante una cuerda de masa despreciable que pasa sobre una polea liviana y sin fricción la cual se encuentra en la parte más alta de un plano inclinado liso el cual forma un ángulo de 30^0 con la horizontal . Si las masas parten del reposo, calcule la aceleración de las masas y la tensión en la cuerda.

Solución

En la figura 5.29 (a) se supone que el bloque m_2 baja y que el m_1 sube a lo largo del plano inclinado. En las figuras 5.29 (b) y 5.29 (c) los correspondientes diagramas de cuerpo libre.

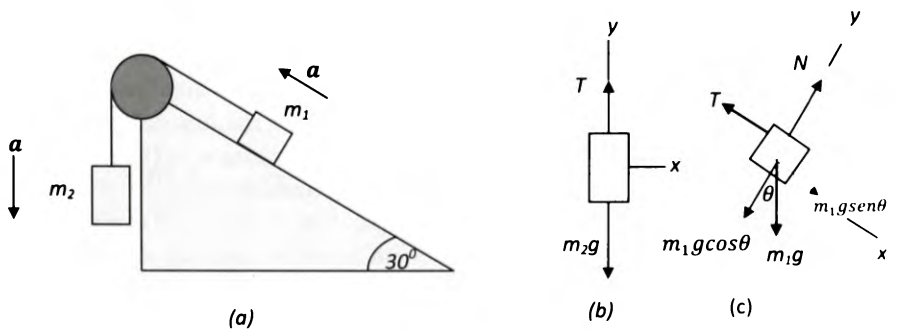


Figura 5.29

En la figura *5.29 (a)* se observa a un bloque de masa m_1 conectado a otro bloque de masa m_2 a través de una cuerda inextensible y de masa despreciable, por lo tanto la tensión de la cuerda es la misma para los dos bloques. En las figuras *5.29 (b)* y 5.29 *(c)* se muestran los diagramas de cuerpo libre de los dos bloques. Aplicando las leyes de Newton al bloque de masa m_2 suponiendo que hacia abajo es la dirección positiva se tiene:

Bloque de masa m_2: $\sum F_y = m_2 a$ si el bloque que cuelga va a tener aceleración hacia abajo implica que la fuerza resultante sobre el bloque debe tener la misma dirección que la aceleración, por lo tanto, para que eso ocurra el peso $m_2 g$ debe ser mayor que la tensión T.

Realizando la sumatoria y considerando positivo hacia abajo, se tienen:

$$m_2 g - T = m_2 a \qquad (5.12)$$

Para el bloque de la figura *5.29 (c)*, se observa su diagrama de cuerpo libre en el cual se considerará que el eje x es aquel que es paralelo al plano inclinado y el eje y es perpendicular al eje x.

Debido a que el movimiento será a lo largo del eje de las x, la sumatoria de todas las fuerzas en esa dirección debe ser igual a $m_1 a$.

Así: $\sum F_x = m_1 a$ Si el bloque que se halla sobre el plano va a moverse paralelo al plano y hacia arriba, entonces esa es la dirección positiva.

$$T - m_1 g sen30^0 = m_1 a \qquad (5.13)$$

Para calcular la aceleración de los bloques primero debemos eliminar la tensión, esto se consigue sumando las ecuaciones (5.12) y (5.13).

$$m_2 g - T + T - m_1 g sen30^0 = m_2 a + m_1 a$$

$$m_2 g - m_1 g sen30^0 = m_2 a + m_1 a$$

$$(m_2 - m_1 sen30^0) g = (m_2 + m_1) a$$

Despejando la aceleración de la última ecuación queda:

$a = \frac{(m_2 - m_1 sen30^0)}{(m_2 + m_1)} g$ y reemplazando los datos: $a = \frac{(4.0 - 2.0 sen30^0)}{(4.0+2.0)kg} \times 10 \frac{m}{s^2}$

$$a = 5.0 \frac{m}{s^2} \qquad (5.14)$$

Para calcular la tensión se puede usar la ecuación (5.12) o la ecuación (5.13) ya que se conoce el valor de la aceleración.

Usando (5.12) $m_2 g - T = m_2 a$ despejando T: $T = m_2 (g - a)$

$$T = 4.0kg \times (10 - 5.0)\frac{m}{s^2} = 20N$$

El signo de la aceleración salió positivo lo que indica que el sistema se mueve de acuerdo a lo que nosotros supusimos, es decir, que el bloque m_2 se mueve hacia abajo y que el bloque m_1 se mueve hacia arriba sobre el plano inclinado. Si la aceleración hubiera salido negativa, entonces el movimiento habría sido en dirección contraria. Además la aceleración en la dirección opuesta tendría el mismo valor de *5.0 m/s*^{2}. Esta conclusión es válida ya que no existe fricción entre el bloque m_1 y el plano inclinado. De existir fricción esta conclusión no sería válida.

Observe la figura *5.29 (a)* donde se puede notar que si m_2g fuera menor que $m_1gsen30^0$ el movimiento habría sido contrario al encontrado, es decir, el bloque m_2 subiría en lugar de bajar.

Si calculamos el valor m_2g éste da *40N,* mientras que $m_1gsen30^0$ da un valor de *10 N* siendo este último mucho menor que m_2g. Por lo tanto, la fuerza neta sobre el sistema de bloques sería igual a $m_2g - m_1gsen30^0 = 30N$. Esta es la fuerza neta que mueve el sistema el cual está compuesto de la masa total que es de $6.0kg$; en este caso no se toma en cuenta la tensión porque serían fuerzas internas. Por lo tanto, aplicando la segunda ley de Newton quedaría de la siguiente forma:

$$Fuerza\ neta = masa\ total \times aceleración$$

$$aceleración = \frac{Fuerza\ neta}{masa\ total}$$

$$aceleración = \frac{30.0N}{6kg} = 5.0\frac{m}{s^2}$$

Lo cual concuerda con el resultado de la ecuación (5.14)

5.9 FUERZAS DE FRICCIÓN

Debe haber notado que ciertos objetos que están sobre el piso presentan cierta resistencia cuando uno trata de moverlos. Unos se resisten más que otros. Suponga que usted desea mover un baúl que se encuentra sobre el piso aplicando una fuerza horizontal sobre el mismo. Resulta que cuando la fuerza aplicada es pequeña el baúl no se mueve de modo que usted empieza a aumentar la fuerza. De pronto, el baúl sale del reposo y mantenerlo en movimiento resulta más fácil que sacarlo del reposo. Es decir, el cuerpo necesita una gran fuerza para empezar a moverse pero una vez que se ha movido es fácil que se siga moviendo. Más aún, si la fuerza necesaria para sacarlo del reposo se mantiene, el baúl se moverá con aceleración. De esta manera si se desea que el baúl se mueva con velocidad constante, será necesario disminuir la fuerza que se usó para sacarlo del reposo. A la fuerza de resistencia que está presente en los cuerpos que se mantienen en reposo cuando se aplica una fuerza externa $\boldsymbol{F}$ se le denomina *fuerza de rozamiento estática o fuerza de fricción estática.* Su símbolo es f_s . Esta fuerza es de naturaleza variable que empieza desde cero hasta un valor límite como se verá en los siguientes ejemplos.

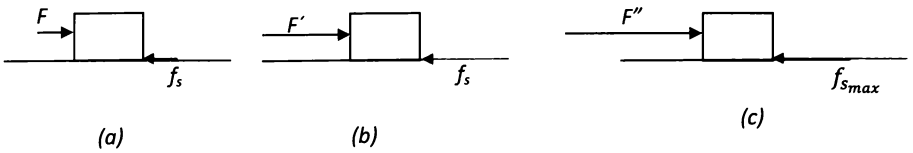


Figura 5.30

En la figura *5.30 (a)* se aplica una fuerza $\vec{F}$ al baúl y éste no se mueve debido a que aparece una fuerza de fricción igual a $\vec{F}$ en magnitud pero opuesta en dirección, llamada f_s. Por lo tanto la sumatoria de fuerzas a lo largo del eje horizontal es igual a cero. Esta fuerza es denominada fuerza de rozamiento estática *(f_s).* Esta fuerza es producto de la rugosidad ente las superficies que están en contacto.

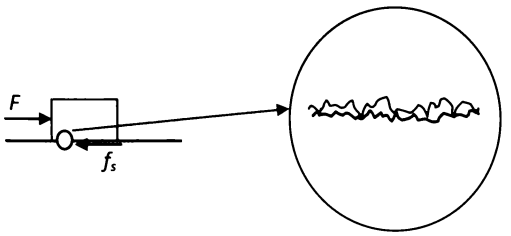
En la figura *5.30 (b)* se aplica una fuerza mayor *F ´* al baúl y éste aún no se mueve, por lo tanto, esto implica que la fuerza que se opone al movimiento ha aumentado en magnitud y la sumatoria de fuerzas en la dirección horizontal se sigue manteniendo igual a cero. De esta manera la fuerza de rozamiento estática es mayor que aquella de la figura *5.30 (a).*

En la figura *5.30 (c)* se aplica una fuerza *F"*aún mayor que en los casos anteriores y el baúl continúa en reposo pero está a punto de moverse. Esto quiere decir que la fuerza de rozamiento estática ha llegado a su valor máximo y que si la fuerza *F"* aumenta muy ligeramente su magnitud, el baúl entraría en movimiento. Una vez que el movimiento ha empezado, el baúl se moverá con más facilidad y es por esto que se moverá con aceleración.

De observaciones experimentales se ha comprobado que la fuerza de rozamiento máxima es directamente proporcional a la fuerza *Normal.* De esta manera, la fuerza de fricción máxima sería expresada matemáticamente como:

$$f_{s\max} = \mu_s N \qquad (5.15)$$

donde μ_s es el coeficiente de rozamiento estático el cual depende de la clase de materiales en contacto y del grado de rugosidad de la superficie. Hasta ahora se ha mencionado que es más fácil mantener a un cuerpo en movimiento que sacarlo del reposo pero no ha habido una explicación al respecto. Una superficie puede parecer perfectamente pulida y sin rugosidad, sin embargo al hacer una ampliación de la superficie o al verla usando un microscopio se notarán grandes irregularidades y aparecerán picos que evitan el movimiento. De hecho cuando dos superficies están en contacto los picos se sueldan en frío y cuando se trata de mover el cuerpo primero hay que romper esta clase de soldadura y esa es la razón por la que resulta difícil sacar un cuerpo del reposo. A continuación veremos una superficie que parece lisa y una ampliación de la misma.



En una ampliación de una pequeña sección de dos superficies en contacto. Los picos que se tocan llegan a soldarse y hacen difícil sacar un objeto del reposo.

Figura 5.31

Una vez que el baúl se ha puesto en movimiento es la fuerza de rozamiento cinética denotada por f_k la que entra en acción. Esta fuerza de rozamiento actúa únicamente cuando el objeto está en movimiento relativo entre las dos superficies en contacto. Por ejemplo, f_k no actúa cuando caminamos o cuando un cilindro rueda a lo largo de un plano ya que no hay movimiento relativo del zapato con respecto al suelo ya que una persona al caminar no arrastra los pies. Tampoco hay movimiento relativo del cilindro con la superficie del plano ya que el cilindro rueda sin deslizar. En estos casos la fuerza de rozamiento es la estática f_s.

Experimentalmente se observa que esta fuerza de rozamiento cinética f_k es directamente proporcional a la *Normal* y matemáticamente se expresa como:

$$f_k = \mu_k N \qquad (5.16)$$

La constante de proporcionalidad entre la fuerza de rozamiento cinético y la Normal se conoce como *coeficiente de rozamiento cinético* y se denota por μ_k. Este coeficiente *no depende del área de contacto* pero si depende de la velocidad. Además se cumple siempre que $\mu_s > \mu_k$. En este texto consideraremos que los coeficientes de rozamiento estático y cinético mantienen un valor constante.

Ejemplo 5.10

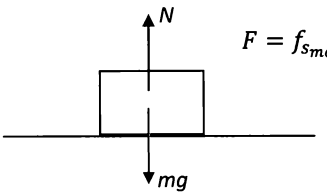
Un cuerpo de masa 5.0 *kg* se halla en reposo sobre una superficie horizontal cuyos coeficientes de rozamiento estático y cinético son: $\mu_s = 0.4$ y $\mu_k = 0.2$ respectivamente. Se aplica una fuerza horizontal sobre el bloque.

a) Calcule la fuerza necesaria para que el cuerpo esté a punto de moverse.
b) De mantenerse esta fuerza, calcule la aceleración que adquiriría el bloque.
c) Calcule la fuerza que debe aplicarse para que el cuerpo se mueva con velocidad constante una vez que haya sido puesto, previamente, en movimiento.

Solución:

a) La fuerza necesaria para que el cuerpo esté a punto de moverse es la fuerza de rozamiento estática máxima: $f_{s_{max}} = \mu_s N$ donde la normal es igual al peso del cuerpo como se puede observar en el diagrama de cuerpo libre de la figura *5.32*.

$\sum F_y = 0 \qquad N - mg = 0 \qquad N = mg$



$$F = f_{s_{max}} = \mu_s N = 0.4 \times mg = 0.4 \times 5.0kg \times 10\frac{m}{s^2}$$
$$F = 20N$$

Figura 5.32

b) $\sum F = ma \qquad a = \frac{F}{m} \qquad a = \frac{20.0N}{5kg} \qquad a = 4.0\frac{m}{s^2}$

c) Para que el cuerpo se mueva con velocidad constante, la fuerza aplicada debe ser igual a la fuerza de rozamiento cinético.

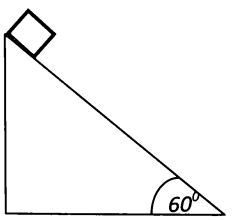
$F = \mu_{kN} \qquad F = \mu_k mg \qquad F = 0.2 \times 5.0kg \times 10\frac{m}{s^2} \qquad F = 10N$

Ejemplo 5.11

Un bloque de 10.0 kg se suelta en la parte más alta de un plano inclinado cuyo coeficiente de rozamiento cinético es de 0.3 y el ángulo que forma con la horizontal es de 60^0 .Calcule la aceleración que adquiere el bloque.

Solución:

Como el bloque se está moviendo, la fuerza de fricción que se opone al movimiento será la fuerza de rozamiento cinética. Mientras $mgsen\theta$ trata de acelerar el bloque, la fuerza de fricción cinética $f_k = \mu_k mgcos\theta$ trata de desacelerarlo.



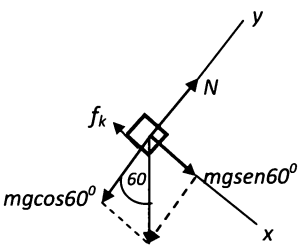


Figura 5.33

La aceleración del bloque será paralela al plano inclinado por lo tanto la sumatoria de fuerzas a lo largo del eje *x* será igual al producto de la masa por la aceleración. Debido a que el cuerpo no tiene aceleración a lo largo del eje *y* la sumatoria de fuerzas a lo largo del eje *y* será igual a cero.

En y: $\sum F_y = 0$ $\quad N - mgcos60^0 = 0 \quad N = mgcos60^0$

$$N = 10kg \times 10\,{}^{m}/_{s^2} \times 0.5 \qquad N = 50N$$

En x: $\sum F_x = ma \quad mgsen\theta - f_k = ma \quad mgsen\theta - \mu_k N = ma$

Despeje a: $a = \frac{mgsen\theta - \mu_k mgcos60^0}{m} = g(sen\theta - \mu_k cos60^0) = 10\frac{m}{s^2}(sen60^0 - 0.3 \times cos60^0)$

$$a = 7.16\frac{m}{s^2}$$

Ejemplo5.12

Un bloque de 2.0 kg se mantiene en reposo sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 30^0 con la horizontal. Calcule el valor de la fuerza de rozamiento estático.

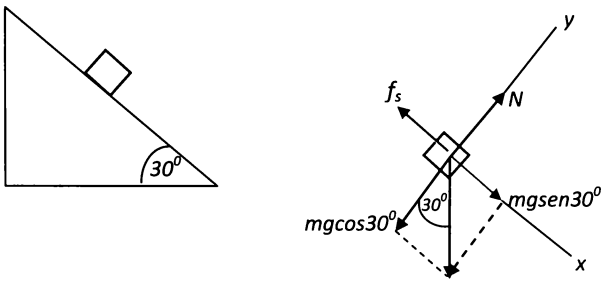


Figura 5.34

Cuidado con calcular $f_s = \mu_s N$ esto es INCORRECTO. Haciendo esto, estaría calculando la fuerza de rozamiento máxima, como si el bloque estuviera a punto de moverse. Lo correcto es hacer la sumatoria de fuerzas en el eje x e igualar a cero ya que el bloque está en reposo:

$$\sum F_x = 0; \quad mgsen30^0 - f_s = 0; \quad f_s = 2.0kg \times 10\frac{m}{s^2} \times sen30^0\,; \quad f_s = 10N$$

Ejemplo 5.13

Un bloque se halla sobre un plano horizontal y éste empieza a inclinarse lentamente hasta que el bloque está a punto de moverse. En ese instante el plano forma un ángulo θ con la horizontal, calcule el coeficiente de fricción estático.

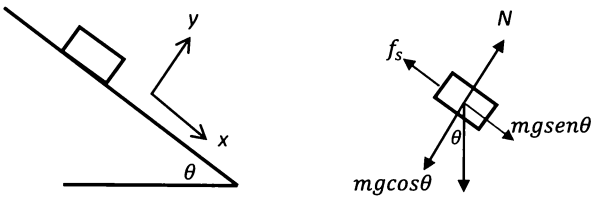


Figura 5.35

Solución:

Se sostiene el bloque en reposo debido a la fuerza de rozamiento estática. Si el bloque está a punto de moverse, entonces la fuerza de fricción estática llegó a su valor máximo y es: $f_{smax} = \mu_s N$ donde μ_s es el coeficiente de rozamiento estático y N es la Normal. La Normal es perpendicular al plano.

Debido a que el bloque está en reposo, se debe cumplir que: $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$.

Por: $\sum F_x = 0$ $\qquad mgsen\theta - f_{smax} = 0$ *(5.17)*

Observe que $mgsen\theta$ es positivo porque se dirige en la dirección positiva del eje de las x, mientras que f_s es negativa porque se dirige hacia el lado negativo del eje de las x.

Sobre el eje y: $\sum F_y = 0$ $\qquad N - mgcos\theta = 0$

De esta última ecuación se obtiene que: $N = mgcos\theta$

Por lo tanto la fuerza de rozamiento estática máxima será:

$$f_{smax} = \mu_s mgcos\theta$$

y remplazando este valor en la ecuación *(5.17)* se obtiene:

$$mgsen\theta = \mu_s mgcos\theta$$

Se cancela mg y queda: $sen\theta = \mu_s cos\theta$

$$\mu_s = tan\theta \qquad (5.18)$$

Este resultado nos permite calcular el coeficiente de rozamiento estático de cualquier objeto, simplemente levantando la superficie donde se encuentra el bloque hasta que el objeto esté a punto de moverse. Luego se mide el ángulo que este plano forma con la horizontal. La tangente de este ángulo es igual al coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la superficie del plano.

ACTIVIDAD 5.1

Ordene de mayor a menor los siguientes objetos en base a su inercia.

a) Un tren con 20 vagones.
b) Un bus de pasajeros.
c) Un mosquito.
d) Un pájaro.
e) Tu libro de física.
f) Un automóvil para 5 personas.

ACTIVIDAD 5.2

Puede un objeto caer con aceleración mayor al de la gravedad sobre la superficie de la Tierra. Explique.

ACTIVIDAD 5.3

¿Cuál es la dirección de la fuerza de rozamiento cuando una persona camina sobre una superficie horizontal? ¿La fuerza de rozamiento es estática o cinética? Explique.

ACTIVIDAD 5.4

Un bloque de masa m se halla en reposo sobre una mesa horizontal. Su diagrama de cuerpo libre consta del peso del bloque (mg) y de la Normal (N). Estas dos fuerzas suman cero porque son de igual magnitud pero tienen dirección contraria. ¿Son el peso y la normal un par acción-reacción? Explique.

ACTIVIDAD 5.5

Una partícula se mueve con una aceleración negativa, ¿significa esto que la partícula está disminuyendo su rapidez? Suponga que el eje positivo de las x es hacia la derecha y que el eje positivo de las y es hacia arriba. Explique su respuesta.

ACTIVIDAD 5.6

¿Será posible que la fuerza resultante (neta) sea cero y que la partícula estuviera en reposo? Explique su respuesta.

ACTIVIDAD 5.7

Es posible que exista alguna relación entre la fuerza que se ejerce sobre una partícula y su dirección del movimiento? Explique su respuesta.

ACTIVIDAD 5.8

Si dos bloques de masas diferentes son soltados desde el reposo y desde una misma altura, se sabe que llegan al suelo al mismo tiempo. ¿Cómo es posible esto si la fuerza gravitacional es mayor sobre el cuerpo de mayor masa? Explique su respuesta.

ACTIVIDAD 5.9

Un camión grande choca con un auto pequeño. En esta colisión, ¿cuál de ellos experimenta la mayor fuerza? Explique su respuesta.

ACTIVIDAD 5.10

En líneas anteriores se definió a la fuerza como la rapidez de variación de la cantidad de movimiento lineal de una partícula. En virtud de esto, ¿cuáles son las unidades de la cantidad de movimiento en el Sistema Internacional de Unidades?

ACTIVIDAD 5.11

¿Dónde es más fácil acelerar un objeto ¿sobre una superficie horizontal sin fricción en la Tierra o sobre una superficie horizontal sin fricción en la Luna? La aceleración de la gravedad en la Luna es aproximadamente la sexta parte de la aceleración de la gravedad en la Tierra.

Ejemplo 5.14

Un bloque de masa m_1 =8.0 kg que se halla sobre un plano inclinado el cual forma un ángulo de 30^0 con la horizontal está conectado mediante una cuerda ligera e inextensible a otro bloque de masa $m_2 = 10.0kg$ que cuelga. Los bloques se conectan a través de una polea liviana y sin fricción colocada en la parte superior del plano inclinado como se muestra en la figura 5.36. Suponga que el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque de 8.0 kg y el plano inclinado es 0.5. Calcule la aceleración de los bloques.

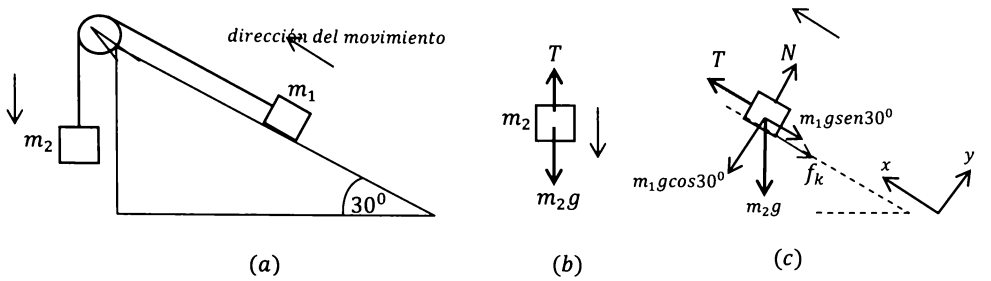


Figura 5.36

Solución:

En las figuras *5.36 (a)* se halla el diagrama de cuerpo libre del bloque m_2 y en la figura 5.36 *(b)* está el diagrama de cuerpo libre del bloque m_1.

Realizando la sumatoria de fuerzas del bloque m_2 se tiene:

$$\downarrow \sum F = m_2 a \qquad m_2 g - T = m_2 a \tag{5.19}$$

Realizando la sumatorio de fuerzas del bloque $m_1 a$ se tiene:

$$\sum F_x = m_1 a \qquad T - m_1 g sen30^0 - \mu_k N = m_1 a \tag{5.20}$$

Para el bloque m_1, la sumatoria de fuerzas en la dirección y es igual a cero ya que en esa dirección no hay movimiento del bloque. Por lo tanto:

$$\sum F_y = 0 \qquad N - m_1 g \cos 30^0 = 0$$

$$N = m_1 g \cos 30^0$$

(5.21)

Sumado las ecuaciones *(5.19)* y la ecuación *(5.20)* se elimina la tensión y remplazando la ecuación *(5.21)*

$$m_2 g - m_1 g sen30^0 - \mu_k m_1 g cos30^0 = (m_1 + m_2) a$$

Despejando a: $a = \frac{m_2 g - m_1 g sen30^0 - \mu_k m_1 g cos30^0}{(m_1 + m_2)} = \frac{10^{m}/_{s^2}(10.0kg - 8.0kg \times 0.5 - 0.5 \times 8.0kg \times 0.866)}{(8+10)kg}$

$$a = 1.4\,{}^{m}/_{s^2}$$

5.10 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Una de las aplicaciones de las Leyes de Newton es el movimiento de una partícula que se mueve con rapidez constante siguiendo una trayectoria circular.

PERIODO

Se define como el tiempo en el que una partícula realiza una revolución o que realiza una vuelta completa. Si la partícula se mueve con rapidez constante v y se mueve en una trayectoria circular de radio r, el tiempo en realizar una vuelta completa será: $T = \frac{2\pi r}{v}$

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad (5.22)$$

donde v es la rapidez de la partícula, r es el radio de la trayectoria circular y T es el periodo. Las unidades del periodo son los *segundos*.

FRECUENCIA

Se define como el número de revolucionas que realiza una partícula en un segundo. Por lo tanto la relación entre periodo y frecuencia es:

$$T = \frac{1}{f} \qquad (5.23)$$

Las unidades de la frecuencia son: rev/s; $vueltas/s$; $vibra/s$; o $Hz\ (s^{-1})$

Ejemplo 5.14

Un disco de $60mm$ de radio gira a 120 revoluciones por minuto (rpm), ¿cuál es la rapidez de un punto de su periferia?

Solución

La frecuencia es 120 revoluciones cada minuto y expresando este dato en revoluciones por segundo se puede calcular el periodo.

$$\frac{120rev}{min} = \frac{120rev}{min} \times \frac{min}{60s} \qquad f = 2.0\frac{rev}{s}$$

por lo tanto, el periodo será: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2.0s^{-1}} \qquad T = 0.5s$

Conociendo el periodo y el radio se puede aplicar la ecuación (5.22):

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad v = \frac{2\pi \times 0.060m}{0.5s} \qquad v = 0.75\,{}^{m}/_{s}$$

Por lo tanto, cada punto de la periferia se mueve a $0.75\,{}^{m}/_{s}$. Sin embargo, la velocidad de los puntos de la periferia del disco no es constante pues está cambiando continuamente su dirección. Por esta razón al movimiento circular uniforme se lo conoce como movimiento circular con rapidez constante y no con velocidad constante. Recuerde que la velocidad es un vector y este vector velocidad está cambiando continuamente su dirección ya que es tangente a la trayectoria. Cuando se dice que un movimiento es con velocidad constante, ese movimiento tiene que ser en línea recta y en una sola dirección.

5.11 ACELERACIÓN CENTRÍPETA

Como se aclaró en el párrafo anterior de que velocidad constante significa movimiento en línea recta, en esta parte del texto se estudiará el movimiento circular uniforme y las fuerzas que actúan sobre una partícula que describe este tipo de movimiento.

Debido a que la velocidad es tangente a la trayectoria, cuando la partícula realiza un movimiento circular, la magnitud de la velocidad se puede mantener constante pero no su dirección la cual estará cambiando continuamente.

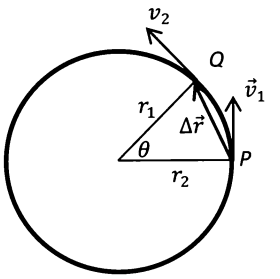


Figura 5.37

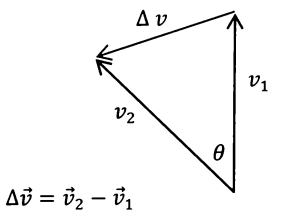


Figura 5.38

La figura 5.37 muestra el movimiento de una partícula que se mueve del punto P al punto Q en el cual la velocidad cambia de $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$. Estas dos velocidades están representadas en la figura 5.38.

En la figura 5.37 el triángulo en rojo es semejante al triángulo de la figura 5.38 debido a que las velocidades al ser tangentes a la trayectoria, son perpendiculares a los radios. Por lo tanto se puede realizar la siguiente relación:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} \qquad (5.24)$$

donde Δr es la distancia que la partícula se mueve durante un intervalo de tiempo Δt con rapidez constante v. Así, $\Delta r = v\Delta t$. Remplazando en la ecuación (5.24):

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v\Delta t}{r} \qquad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

reconociendo que: $\frac{\Delta v}{\Delta t} = aceleración.$

$a_c = \frac{v^2}{r}$ dirigida hacia el centro de la trayectoria circular-

donde a_c es llamada aceleración centrípeta o aceleración radial debido a que esta aceleración se debe exclusivamente al cambio en la *dirección de la velocidad* y no al cambio en la magnitud de la velocidad.

La relación que existe entre la rapidez tangencial y la rapidez angular es: $v = \omega r$ donde ω es la rapidez angular de la partícula y r es el radio de la trayectoria circular. Por lo tanto:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad (5.25)$$

remplazando $v = \omega r$ se obtiene:

$$a_c = \omega^2 r \qquad (5.26)$$

En el siguiente diagrama se observa la velocidad de la partícula y su aceleración centrípeta. Observe que mientras la velocidad es tangente a la trayectoria circular, la aceleración centrípeta es perpendicular al vector velocidad y dirigida hacia el centro de la trayectoria circular que describe la partícula.

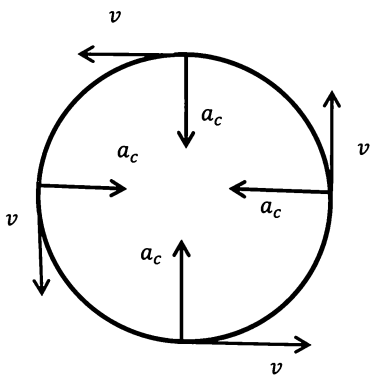


Figura 5.39

Ejemplo 5.15

Una partícula se mueve siguiendo una trayectoria circular cuya circunferencia mide 50.0π cm. con una rapidez de 5.0 cm/s. Calcule la magnitud de la aceleración centrípeta.

Solución

En este problema se da el perímetro de la circunferencia por lo tanto primero calcularemos su radio. El perímetro está dado por: $p = 2\pi r$.

$$r = \frac{p}{2\pi} = \frac{50.0\pi cm}{2\pi} = 25.0cm$$

Luego aplicamos la fórmula para la aceleración centrípeta.

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(5.0 cm/s\right)^2}{25.0cm} \qquad a_c = 1.0 cm/s^2$$

¿Cómo cambia la aceleración centrípeta si se duplica la rapidez?

Dado que la aceleración centrípeta depende del cuadrado de la velocidad, entonces si esta magnitud se duplica la aceleración centrípeta será multiplicada por 4.

Es decir $$a_c = 4 \times 1.0\, cm/s^2 = 4.0\, cm/s^2$$

Se debe observar que la aceleración centrípeta depende de la rapidez al cuadrado, es decir que si aumenta la rapidez de la partícula, manteniendo su radio constante, aumenta grandemente la aceleración centrípeta. Como ésta varía con el inverso del radio de curvatura, implica que la aceleración centrípeta disminuye a medida que este radio aumenta, manteniendo la misma rapidez. Es por esta razón que se debe tener precaución cuando al conducir un automóvil entramos a una curva cerrada (curva de radio pequeño).

5.12 FUERZA CENTRÍPETA

De acuerdo a la segunda ley de Newton del movimiento, una fuerza neta produce una aceleración, o si existe una aceleración es porque debe existir una fuerza neta. Por lo tanto la fuerza denominada *fuerza centrípeta* es igual al producto de la masa por la aceleración centrípeta.

$$F_c = ma_c = m\frac{v^2}{r} \qquad (5.27)$$

Esta fuerza centrípeta debe tener la misma dirección que la aceleración centrípeta, es decir, apunta hacia el centro de la trayectoria circular que describe la partícula.

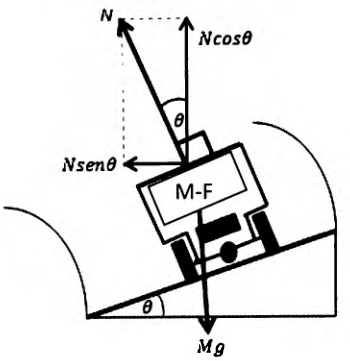


Figura 5.41

Como el carro de masa M no se mueve en la dirección vertical entonces la suma de fuerzas en esa dirección debe ser igual a cero. Por lo tanto:

$$N\cos\theta - Mg = 0 \qquad N\cos\theta = Mg \tag{5.28}$$

Del gráfico de la figura *5.41* debe notarse que sólo existe un vector que apunta hacia el centro de la trayectoria circular. Este vector es una de las componentes de la fuerza Normal y debe notarse que si la carretera fuera horizontal, la fuerza Normal sería vertical y no existiera ninguna componente en la dirección radial (hacia el centro de la trayectoria circular). Por lo tanto la componente $Nsen\theta$ es la fuerza centrípeta necesaria para que el auto gire por la curva. Nótese que no se ha incluido la fuerza de fricción estática. Por lo tanto:

$$Nsen\theta = M\frac{v^2}{r}$$

Dividiendo esta ecuación para la ecuación 5.28 se tiene:

$$\frac{Nsen\theta}{N\cos\theta} = \frac{M\dfrac{v^2}{r}}{Mg}$$

Se cancela la masa M del vehículo y también la fuerza Normal. Y escribiendo $\frac{sen\theta}{cos\theta} = tan\theta$ quedaría:

$$v = \sqrt{gr\tan\theta} \tag{5.29}$$

De esta ecuación se deduce que si el radio de curvatura es grande la velocidad con que entra un auto en una curva puede ser grande. De igual forma, si se desea que la velocidad sea grande el ángulo de peralte debe ser grande. Se insiste en que esta velocidad podría ser superada de este

valor ya que la fricción colabora con la fuerza centrípeta. Sin embargo por razones de seguridad no se ha considerado a la fuerza de fricción porque como se dijo en líneas anteriores, si el pavimento está mojado, se ha regado aceite o las llantas están lisas la fuerza de fricción sería despreciable y el carro podría deslizar sobre la calzada.

Ejemplo 5.18

En una de las salidas de la autopista Perimetral en la ciudad de Guayaquil existe una señal que indica que la máxima velocidad en la salida no debe exceder de 72 km/h. Si el radio de curvatura es de 300 m, calcule el ángulo de peralte que debe existir en la salida.

Solución

De la ecuación $v = \sqrt{grtan\theta}$ se tiene que despejar θ que es el ángulo de peralte. Antes se debe convertir la velocidad en $^{km}/_{h}$ a $^{m}/_{s}$. Así:

$$72\frac{km}{h} = 72\frac{km}{h}\times\frac{1000m}{km}\times\frac{h}{3600s} = 20\frac{m}{s} \qquad \tan\theta = \frac{v^2}{gr} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\left(20^{m}/_{s}\right)^2}{10\frac{m}{s^2}\times 300m}\right)$$

$$\theta = 7.6^0$$

5.14 MOVIMIENTO CIRCULAR VERTICAL

A diferencia del movimiento circular uniforme que se ha estudiado hasta este momento, el movimiento vertical es uno circular en el que la velocidad varía tanto en magnitud como en dirección. Por ejemplo, suponga que se tiene una pista circular de radio *R* y una masa se desliza a lo largo de la pista. Cuando el objeto está en su camino hacia arriba la rapidez disminuye conforme sube, mientras que cuando el objeto está en su camino hacia el punto inferior la rapidez aumenta. Otra diferencia es que el peso juega un papel importante cuando el objeto se encuentra en cualquier punto de la pista.

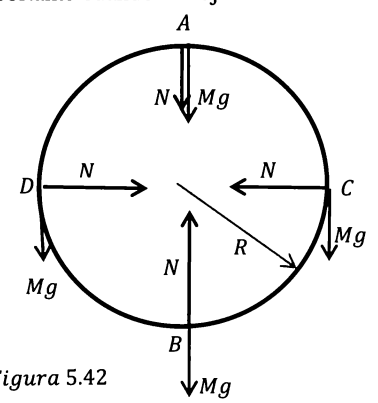


Figura 5.42

Con respecto a la figura *5.42* se va a analizar cuatro puntos que son: A, B, C, D. Debe notarse que la rapidez en el punto A es diferente a la del punto B. Tomando en consideración que la fuerza centrípeta es la suma de todas las fuerzas en dirección radial, empezaremos con el punto A.

En el punto A está actuando el peso mg hacia abajo y la fuerza que la pista ejerce sobre el objeto N. Por lo tanto la fuerza centrípeta es $N + Mg$, en este caso el peso colabora con la fuerza centrípeta.

En el punto B el peso está alejándose del centro de la trayectoria circular (está hacia abajo) y la reacción de la pista sobre el objeto es hacia arriba. Tomando en cuenta que las fuerzas que se dirigen hacia el centro de la trayectoria circular son positivas se tiene que la fuerza centrípeta en el punto B es: $N - Mg$.

En los puntos C y D el peso no contribuye ni en favor ni en contra de la fuerza centrípeta porque no tiene ninguna componente en la dirección radial. Por lo tanto, en estos puntos la fuerza que realiza la pista sobre el objeto N es la fuerza centrípeta.

Resumiendo: Punto A: $N + Mg = M\frac{v_A^2}{R}$ *(5.30)*

Punto B: $N - Mg = M\frac{v_B^2}{R}$ *(5.31)*

Punto C: $N = M\frac{v_C^2}{R}$ *(5.32)*

Punto D: $N = M\frac{v_D^2}{R}$ *(5.33)*

Además existe otro tema importante de analizar y es aquel en que el objeto debe tener una velocidad mínima en el punto A para que pueda describir la circunferencia. De hecho esa velocidad mínima en el punto más alto de la trayectoria no es cero. En el punto A la velocidad mínima es cuando no existe una fuerza que la pista ejerza sobre el objeto; en este caso es el peso el que hace el papel de la fuerza centrípeta. Esto es:

$$Si\ N = 0 \text{ en el punto } A, \text{ entonces}: \quad Mg = M\frac{v_{\min}^2}{R} \qquad v_{\min} = \sqrt{gR}$$

Si la velocidad del objeto es menor a la velocidad mínima, éste se desprenderá de la pista antes de llegar al punto A. y su trayectoria será la de un cuerpo libre que se mueve bajo el efecto de la aceleración de la gravedad.

La fuerza que la pista ejerce sobre el objeto en el punto C de la figura *5.42* ¿será igual o diferente a la fuerza que la pista ejerce sobre el objeto en el punto D? Se deja al lector para que responda esta pregunta.

Ejemplo 5.19

En un parque de diversiones, un carrito y sus pasajeros tienen una masa total de 500 kg y se encuentra en la parte más alta de un juego llamado "la montaña rusa". El carrito tiene una rapidez de 25 m/s en el punto B de la figura *5.43*. a) calcule la reacción de la pista en el punto B y b) la máxima velocidad que debe tener para no salirse de la pista en el punto C.

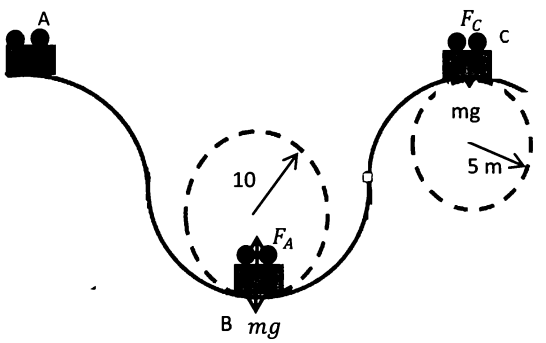


Figura 5.43

Solución

Cuando el carrito está en el punto *B* experimenta dos fuerzas: una es el peso mg y otra es la fuerza que la pista ejerce sobre el carrito y está dirigida hacia arriba (F_A). Esta fuerza debe ser mayor al peso para que exista una fuerza neta dirigida hacia el centro de la trayectoria circular en el punto *B*. Por lo tanto, la sumatoria de todas las fuerzas actuando en el punto *B* es igual a la fuerza centrípeta.

$$\sum F_{radial} = F_A - mg = m\frac{v_B^2}{r}$$

Despejando F_A queda:

$$F_A = m\left(\frac{v_B^2}{r} + g\right) \qquad (5.34)$$

Remplazando los datos: $m = 500kg$; $v_B = 25\,{}^{m}/_{s}$; $r = 10m$; $g = 10\,{}^{m}/_{s^2}$ se tiene:

$$F_A = 500kg\left[\frac{\left(25\frac{m}{s}\right)^2}{10m} + 10\frac{m}{s^2}\right] \qquad F_A = 36250N$$

Esta es la fuerza que la pista ejerce sobre el carrito en el punto *B*.

b) Para calcular la máxima rapidez del carrito en el punto C, la fuerza centrípeta debe ser igual al peso del carrito y por lo tanto la fuerza que la pista ejerce sobre éste debe ser igual a cero. Imagínese que el carrito está en el punto C a punto de salirse de la pista, por lo tanto ésta no está ejerciendo ninguna fuerza sobre el carrito. Así, la sumatoria de todas las fuerzas en el punto C debe ser igual a la fuerza centrípeta. Note que en este punto $F_C = 0$.

$$\sum F_{radial} = m\frac{v_C^2}{r}$$

La única fuerza en dirección radial en el punto C es el peso, por lo tanto:

$$mg = m\frac{v_C^2}{r}$$

Despejando la rapidez v:

$$v_C = \sqrt{gr}$$

Remplazando los datos: $g = 10\,{}^{m}/_{s^2}$; $r = 5m$ se tiene:

$$v_C = \sqrt{10\,{}^{m}/_{s^2} \times 5m} = 7\,{}^{m}/_{s}$$

Si el carrito al pasar por el punto C excede este valor, se saldrá de la pista.

Ejemplo 5.20

Con referencia al *"ejemplo 5.29"*, ¿es posible que el carrito experimente una fuerza igual a su peso en el punto B y aún se mantenga sobre la pista?

Solución

Si ese fuera el caso la fuerza centrípeta sería cero y por lo tanto sería imposible que el carrito pudiera describir una trayectoria circular. Así, la reacción que ejerce la pista sobre el carrito en el punto B debe ser mayor al peso.

Ejemplo 5.21

En los parques de diversiones hay un juego llamado "rotor" o "centrífuga" el cual consiste en colocarse hacia la pared de un gran cilindro el cual rota con cierta rapidez angular. La persona se halla parada sobre un piso el mismo que es retirado cuando el cilindro alcanza cierta velocidad. ¿Cuál debe ser la rapidez tangencial del filo del cilindro para que la persona esté a punto de resbalar? Suponga que el coeficiente de rozamiento estático entre la pared y la espalda de la persona es de 0.5 y que el radio del cilindro que gira es de 5.0 metros.

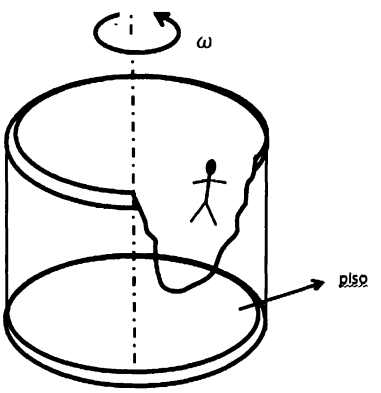


Figura 5.44

Solución

Las fuerzas que actúan sobre la persona son el peso mg, la fuerza de rozamiento estática f_s y la fuerza que la pared cilíndrica ejerce sobre la persona. Por lo tanto, la fuerza de rozamiento es la que sostiene a la persona. Además, la fuerza de rozamiento es igual al peso. Debido a que la fuerza f_s es directamente proporcional a la Normal, mientras mayor sea la rapidez de rotación del rotor, mayor será la Normal. Sin embargo, nunca la fuerza de fricción será mayor al peso de la persona. Lo que sucedería, en caso de que la velocidad de rotación se incrementara, es que la persona no estaría a punto de resbalar ya que la fricción de rozamiento estática máxima se ha incrementado. Se debe puntualizar de que la fuerza de rozamiento nunca va a ser mayor que el peso de la persona pero la fuerza de rozamiento estática *máxima* si puede ser mayor que el peso. Entonces, la única fuerza que está dirigida hacia el centro de rotación es la Normal. Así, la sumatoria de fuerzas en dirección radial es la fuerza Normal la cual es igual a la fuerza centrípeta.

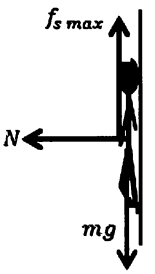


Figura 5.45

$$\sum F_{radial} = m\frac{v^2}{r}$$

$$N = m\frac{v^2}{r}$$

La fuerza de rozamiento estático se define como: $f_{s\,max} = \mu_s N \qquad \therefore \quad N = \frac{f_{s\,max}}{\mu_s}$

Haciendo sumatoria de fuerzas en la dirección vertical se encuentra que:

$$\sum F_y = 0 \qquad f_{s\,\max} = mg \qquad N = \frac{mg}{\mu_s}$$

Remplazando el valor de la Normal se obtiene:

$$\frac{mg}{\mu_s} = m\frac{v^2}{r}$$

Observe que la masa se cancela, y despejando v: $v = \sqrt{\frac{gr}{\mu_s}}$

Remplazando los valores dados en el problema se obtiene:

$$v = \sqrt{\frac{10\frac{m}{s^2} \times 5.0m}{0.50}} \qquad v = 10 m/s$$

Si por alguna razón esta rapidez se reduce, disminuirá el valor de la Normal y por ende disminuirá la fuerza de fricción, y al reducir ésta será menor que el peso y la persona deslizará hacia abajo. Por esta razón, en el rotor que se encuentra en los parques de diversiones la persona es sujetada con cinturones de seguridad. Por seguridad del público los rotores se mueven a velocidades mayores que las calculadas en este ejercicio.

PROBLEMAS

5.1 Un bloque de 1.0 kg es arrastrado a lo largo de una superficie horizontal sin fricción por medio de una fuerza horizontal de 5.0 N. Calcule la aceleración del bloque.

5.2 Un bloque de 2.0 kg de masa es arrastrado a lo largo de una superficie horizontal sin fricción por medio de una fuerza de 10.0 N la cual forma un ángulo de 60^0 con la horizontal. Calcule la aceleración del bloque.

5.3 Un bloque de 2.0 kg de masa se halla en reposo sobre una pared vertical sin fricción como se muestra en la figura 5.46. Calcule la magnitud de la fuerza que se debe aplicar sobre el bloque para que éste se mantenga en reposo.

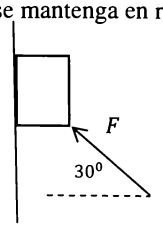


Figura (5.46)

5.4 Un bloque de masa $m_1 = 2.0kg$ está atado por medio de una cuerda que pasa por una polea sin fricción a otro bloque de masa $m_2 = 3.0kg$ que cuelga del otro extremo. Si el bloque de masa m_1 se desliza sobre una superficie horizontal y sin fricción, como se muestra en la figura 5.47 , calcule la aceleración de los bloques y la tensión en la cuerda.

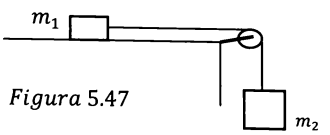


Figura 5.47

5.5 Calcule la aceleración de los bloques del problema 5.4 si se remplaza a la masa m_2 por una fuerza igual a su peso, como se muestra en la figura.

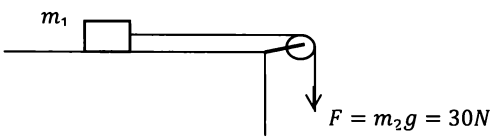


Figura 5.48

5.6 Una fuerza $\vec{F} = 100\ N$ se aplica sobre el bloque de masa $m_1 = 15kg$, el mismo que está en contacto con otro bloque de masa $m_2 = 10kg$ como se muestra en la figura *5.49*. Suponga que los bloques se hallan sobre una superficie sin fricción.

a) Calcule la fuerza de contacto entre los dos bloques

b) Calcule la aceleración de los bloques.

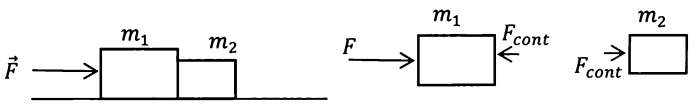


Figura 5.49

5.7 Una fuerza $\vec{F} = 100N$ se aplica sobre el bloque de masa $m_2 = 10kg$ en dirección hacia la izquierda como se muestra en la figura 5.50. Este bloque está en contacto con otro bloque de masa $m_1 = 15kg$. Este enunciado es igual que el problema 5.6 con la diferencia de que la fuerza es hacia la izquierda.

a) Calcule la fuerza de contacto entre los dos bloques.

b) Calcule la aceleración de los bloques.

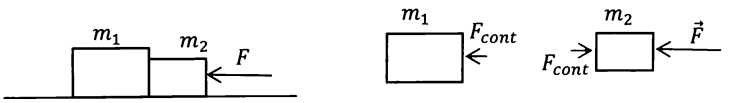


Figura 5.50

5.8 Dos bloques $m_1 = 15kg$ y $m_2 = 10kg$, mostrados en la figura *5.51*, están conectados por medio de una cuerda cuya resistencia a la ruptura es de 30 *N*. ¿Cuál es la máxima fuerza *F* que puede aplicarse al

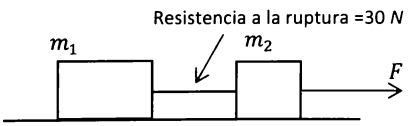


Figura 5.51

bloque m_2 para que la cuerda no se rompa? Suponga que la superficie horizontal es sin fricción.

5.9 Del techo de un elevador se cuelga un bloque de 10.0 *kg* por medio de una cuerda como se muestra en la figura *5.52* . Si el elevador se mueve hacia arriba con una aceleración constante de $2\,{}^{m}/_{s^2}$, ¿cuál es la tensión en la cuerda que sostiene el bloque?

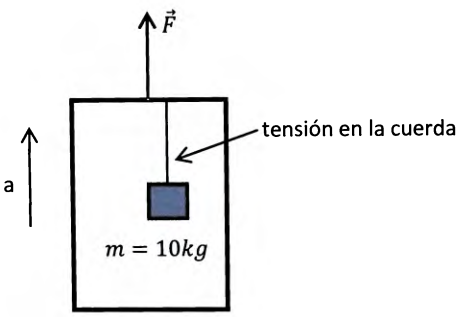


Figura 5.52

5.10 Si la cuerda que sostiene el bloque de 10 *kg* del problema *5.9* tuviera una resistencia a la ruptura de 150 *N*, ¿cuál sería la máxima aceleración que debería tener el elevador para que la cuerda no se rompa?

5.11 En la figura *5.52* del problema 5.9 se muestra un elevador de 400 *kg* que lleva en su interior un bloque de 10 *kg*. Si la fuerza $\vec{F}$ que se ejerce sobre este ascensor es de 7100 *N*, ¿cuál es el máximo número de personas que pueden viajar en el elevador para que éste suba con velocidad constante? Suponga que cada persona tiene una masa de 60 *kg* .

5.12 Una fuerza neta de 50 *N* se aplica sobre un objeto y éste adquiere una aceleración de $2\,{}^{m}/_{s^2}$. ¿Qué fuerza debe aplicarse para que su aceleración sea de $3.0\,{}^{m}/_{s^2}$?

5.13 Sobre un objeto de 2.0 *kg* de masa que se halla sobre una mesa horizontal sin fricción se aplican dos fuerzas perpendiculares. La fuerza F_1 es de 30 *N* de magnitud y está dirigida a lo largo del eje $+x$. La fuerza F_2 es de 40 N de magnitud y está dirigida hacia el eje $+y$. ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza que mantendría en reposo a este objeto? $sen53^0 = {}^{4}/_{5}$

5.14 Desde el segundo piso de un edificio se desea bajar una caja de 500 *N* de peso usando una cuerda que resiste hasta 400 *N* solamente. La única forma de bajar esta caja es aplicándole una aceleración. Calcule la mínima aceleración que se le debe imprimir a la caja para lograr este objetivo?

5.15 Del techo de un vagón que se mueve hacia la derecha se cuelga una masa m mediante una cuerda como se observa en la figura 5.53. Si la cuerda forma un ángulo θ con la vertical, ¿cuál es la aceleración del vagón? Exprese su respuesta en términos de g y θ.

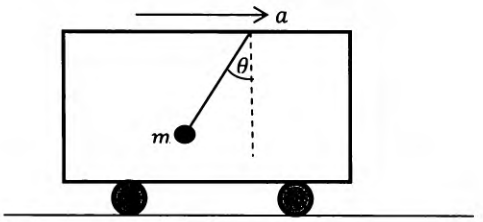


Figura 5.53

5.16 Una fuerza *F* se aplica sobre un objeto como se muestra en la figura *5.54*. Si la masa del objeto es de 0.866 *kg* y la fuerza es de 8.0 *N*, calcule la magnitud de la Normal y la aceleración del objeto si se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción. $cos60^0 = 0.5$; $sen60^0 = 0.866$

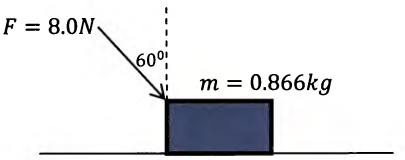


Figura 5.54

5.17 Calcule la fuerza horizontal *F*, dirigida hacia la derecha, que debe aplicarse a la esfera de 10 *kg* de la figura *5.55* para que se mantenga en reposo. $sen53^0 = {}^4/_5$; $cos53^0 = {}^3/_5$

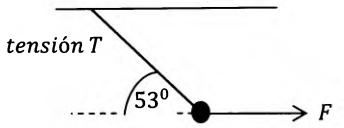


Figura 5.55

5.18 Un hombre hala una cuerda con una fuerza de 100 *N*. el otro extremo de la cuerda está atado a una balanza de resorte y ésta a un poste vertical. ¿cuál es la lectura de la balanza?

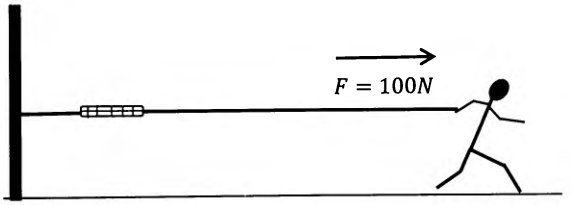


Figura 5.56

5.19 Un bloque de masa $m_1 = 1.0kg$ descansa sobre otro de masa $m_2 = 10.0kg$. Entre m_1 y m_2 hay fricción de modo que los dos bloques viajan juntos. Entre m_2 y la superficie

horizontal no hay fricción. Calcule la magnitud de la fuerza F para que los dos bloques se muevan con una aceleración de $2.0\,{}^{m}/_{s^2}$ hacia la derecha.

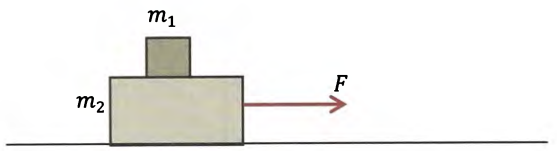


Figura 5.57

5.20 Una caja puede viajar sobre la pared vertical de un vagón sin caerse como se muestra en la figura *5.58* . Esto se debe a:

a) La velocidad del vagón es extremadamente grande pero constante.
b) El vagón experimenta una pequeña aceleración que va disminuyendo con el tiempo.
c) Debe haber fricción entre las dos paredes que están en contacto
d) La caja siempre resbale.

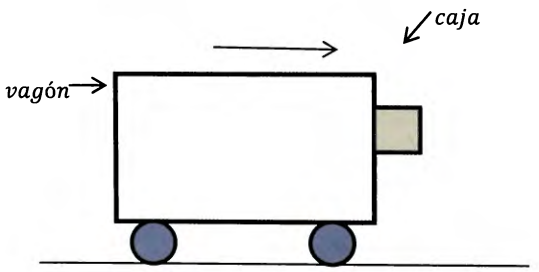


Figura 5.58

5.21 El disco de la figura *5.59* da una vuelta cada 3.14 segundos. Si el radio de la trayectoria circular es de 1.0 m, calcule la aceleración centrípeta de la partícula.

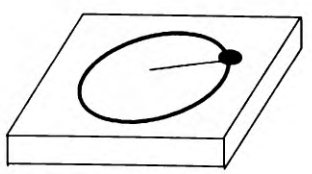


Figura 5.59

5.22 Un niño hace girar una piedra de 2.0 kg atada a una cuerda de 2.0 m de longitud. Si la rapidez de la piedra es de 2.0 m/s, ¿cuál es la tensión en la cuerda?

5.23 Un péndulo cónico consiste de un objeto atado a una cuerda de longitud L que forma un ángulo θ con la vertical como se muestra en la figura *5.60* . El movimiento del objeto es en un plano horizontal con movimiento circular uniforme. Obtenga una expresión para la rapidez del objeto en función de la aceleración de la gravedad g, la longitud de la cuerda L, y el ángulo θ.

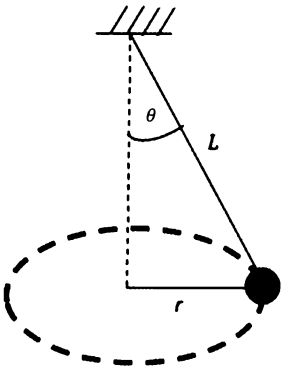


Figura 5.60

5.24 Considere un péndulo simple de longitud $L = 1.6m$ que tiene atado al extremo de la cuerda un objeto de masa $m = 1.0kg$. ¿Cuál es la tensión en la cuerda cuando pasa por la posición más baja de su movimiento. La velocidad en ese instante es de $4\,{}^{m}/_{s}$. La aceleración de la gravedad es de $10\,{}^{m}/_{s^2}$.

5.25 Un automóvil que viaja a 30 m/s entra en una curva cuyo radio de curvatura es de 200 metros. Si la carretera no tiene peralte, cuál es el mínimo coeficiente de rozamiento estático entre las llantas y el pavimento para que el automóvil logre girar sin derrapar?

5.26 Suponga que en el problema *5.25* no hay fricción entre las llantas del automóvil y el pavimento, ¿cuál debería ser la tangente del ángulo de peralte para que el automóvil logre girar sin derrapar?

5.27 Un pequeño bloque se mueve horizontalmente y logra ascender por la pista circular de radio igual a 10 m de tal forma que la fuerza que la pista ejerce sobre el bloque en la parte más alta es de 3 veces su peso. Calcule la velocidad v del bloque en la parte más alta de la pista.

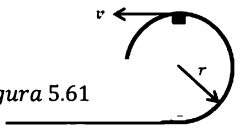


Figura 5.61

5.28 Cuál es la máxima rapidez que puede tener un automóvil para que logre dar una curva de 250 metros de radio de curvatura si la carretera tiene un ángulo de peralte de 10^0 y la fricción entre las llantas y la carretera es despreciable. $sen10^0 = 0.17$; $cos10^0 = 0.98$ y $\sqrt{0.176} = 0.42$.

5.29 Cuando un bloque pequeño pasa por la parte más alta de una pista circular su rapidez máxima es de $20\,^{m}/_{s}$ para apenas mantenerse en contacto con la pista . ¿Cuál debe ser el radio de curvatura para lograr este objetivo?

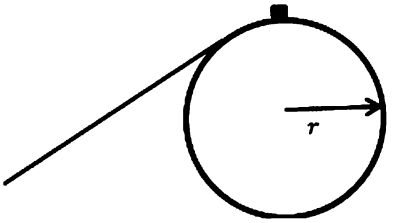


Figura 5.62

5.30 Un bloque entra en una pista circular de radio $r = 10m$ y cuando alcanza el punto B de la figura se desprende de la pista y continúa moviéndose libremente. El radio $0B$ forma un ángulo de 39.8^0 con la horizontal. Calcule la rapidez del bloque en el punto B. $Sen39.8^0 = 0.64$

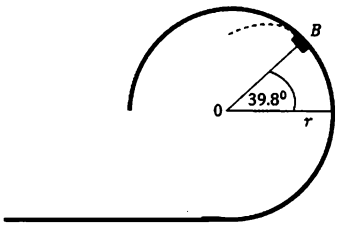


Figura 5.63

5.31 La masa de la Tierra es M, su radio es R y el periodo es T (Periodo es el tiempo en el que la Tierra realiza una vuelta alrededor de su propio eje. Obtenga una expresión para la aceleración centrípeta que experimenta una persona que esté en el Ecuador. Exprese su respuesta en función R y T.

5.32 Un bloque atado a una cuerda da vueltas siguiendo una trayectoria circular vertical como se muestra en la figura *5.64*. Si la cuerda se rompe cuando el objeto se encuentra en la parte más baja de su trayectoria, indique cuál de las figuras representa el movimiento del bloque inmediatamente después de que se rompe la cuerda.

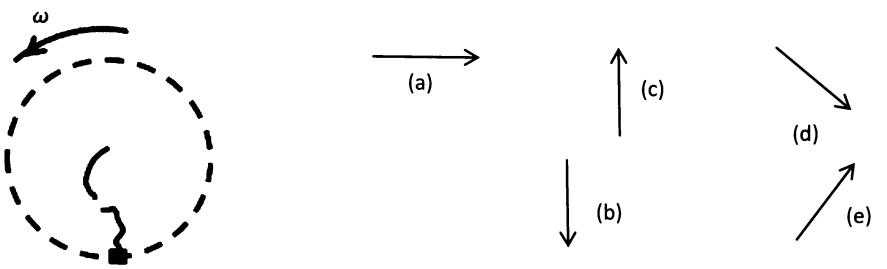


Figura 5.64

5.33 Un avión da vueltas siguiendo una trayectoria vertical de radio igual a 9.0 km.¿ Cuál debe ser la velocidad del avión en la parte más alta de su trayectoria circular para que el piloto no experimente peso alguno?

5.34 Un niño ata una piedra de 1.0 kg a una cuerda y hace dar vueltas de modo que la piedra se mueve en un círculo horizontal de radio igual a 2.0 m. Si la cuerda se rompe cuando la tensión es de 50 N ¿cuál es la velocidad máxima de la piedra? Calcule también la tensión en la cuerda si la velocidad fuera de 5 m/s, su masa fuera de 2.0 kg y el radio se mantuviera constante. ¿Se rompería la cuerda?

5.35 Una piedra atada a una cuerda gira en un círculo vertical de radio R. La longitud de la cuerda es L y la rapidez de la piedra en la parte de arriba es v_{arr} y en la parte de abajo es v_{aba}. Calcule la relación de las tensiones T_{arriba} y T_{abajo}. (Nota: El movimiento vertical como en este ejemplo es un movimiento con rapidez variable).

5.36 Un planeta orbita alrededor del Sol y se encuentra a una distancia de $1.5 \times 10^{11} m$. Suponiendo que el planeta da una vuelta alrededor del Sol en $3.14 \times 10^{7}\ segundos$, calcule la aceleración centrípeta del planeta.

5.37 Una caja viaja en la pared vertical de un vagón que se mueve hacia la derecha como se muestra en la figura 5.65. Calcule la máxima aceleración que debe tener el vagón para que la caja no deslice. Suponga que el coeficiente de rozamiento estático entre la caja y la pared vertical del vagón es de 0.5.

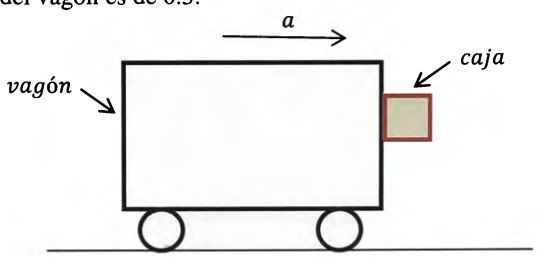


Figura 5.65

5.38 Dos bloques de masas m_1 y m_2 están conectados mediante una cuerda sin masa que pasa alrededor de un polea de masa despreciable y sin fricción como se muestra en la figura. Suponiendo que $m_1 > m_2$ y que los bloques parten del reposo, indique cuál de las siguientes alternativas es **correcta para el instante en que la masa m_1 está a punto de chocar contra el suelo.**

a) La rapidez del bloque de masa m_1 es cero.
b) La máxima distancia que asciende el bloque de masa m_2 es h.

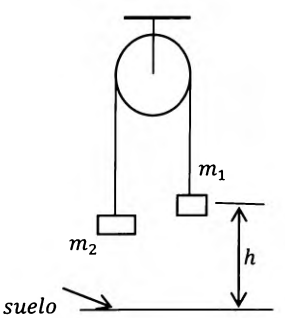


Figura 5.66

c) Cuando el bloque m_2 asciende a su altura máxima se ha movido una distancia mayor que h.

d) La aceleración de m_2 es la mitad de la aceleración de m_1.

e) El sistema de las dos masas no acelera sino que se mueve con rapidez constante.

5.39 Un bloque de masa m se halla en reposo sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con respecto a la horizontal. La fuerza total que el plano inclinado ejerce sobre el bloque de masa m es:

a) mg b) $mgcos\theta$ c) $mgsen\theta$ d) $\mu_s mgcos\theta$ e) $\mu_k mgsen$

5.40 Para el siguiente sistema de poleas mostrado en la figura, calcule la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ que se debe ejercer para mantener el bloque de peso W en reposo. Suponga que las poleas tienen masa despreciable y sin fricción en sus ejes.

a) W
b) $2W$
c) $W/3$
d) $W/2$
e) $2W/3$

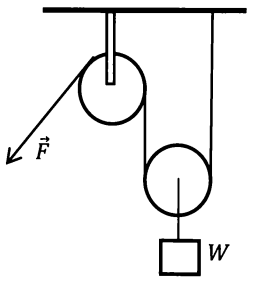


Figura 5.67

5.41 Un bloque de masa m_1 se halla sobre un bloque de masa m_2 como se muestra en la figura. El coeficiente de rozamiento estático entre m_1 y m_2 es μ_s. Suponga que entre m_2 y el piso no hay fricción. ¿Cuál es la mínima fuerza $\vec{F}$ horizontal que se debe ejercer sobre m_2 para que el bloque m_1 no deslice?

a) $\mu_s m_1 g$
b) $\mu_s(m_1 + m_2)g$
c) $\mu_s m_2 g$
d) $\mu_s(m_1 - m_2)g$
e) m_1 desliza porque no depende de la fuerza $\vec{F}$

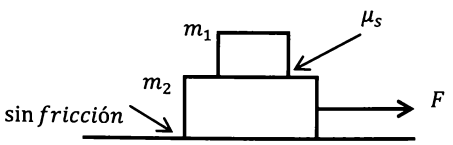


Figura 5.68

5.42 Una fuerza de magnitud F, paralela al plano inclinado, hala tres bloques conectados con una cuerda inextensible y de masa despreciable, sobre un plano inclinado sin fricción el cual forma un ángulo θ con la horizontal. Suponga que los tres bloques tienen igual masa m y que se mueven en la dirección de la fuerza $\vec{F}$. Calcule la aceleración de los bloques.

a) $F/_{3m}$

b) $F/_{(3mgsen\theta)}$

c) $F/_{3m} - gsen\theta$

d) $Fsen\theta/_{3m}$

e) $F - 3mgsen\theta$

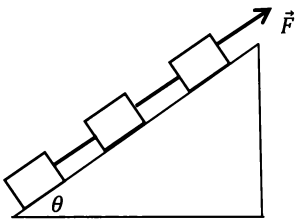


Figura 5.69

TRABAJO Y ENERGÍA

CAPÍTULO 6

6.1 TRABAJO Y ENERGÍA

El término trabajo en nuestra sociedad está asociado con la actividad física e intelectual por la cual un individuo recibe una remuneración o algo equivalente a la misma. Pero en Física el término TRABAJO tiene otro significado y se define como el resultado de la aplicación de una fuerza sobre un cuerpo produciendo un desplazamiento en el mismo.

La Energía se define como la capacidad que tiene un cuerpo para realizar un trabajo.

El trabajo es una cantidad escalar, su unidad en el SI es el Joule (J) y es resultado del **producto punto** entre la fuerza **y** el desplazamiento, como se muestra en la ecuación 6.1

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = FScos\theta \qquad (6.1)$$

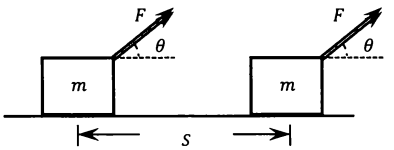


Figura 6.1

De acuerdo a la ecuación 6.1 el término $F_x = Fcos\theta$ es la componente de la fuerza $\vec{F}$ en el eje x, por lo tanto, el trabajo W realizado por la fuerza $\vec{F}$ es el resultado del producto de la componente de la fuerza paralela al desplazamiento por la magnitud del mismo.

El signo del trabajo está dado por el coseno del ángulo. Entonces:

Si $\theta < 90°$ el cos θ es positivo y el trabajo es positivo.

Si $\theta = 90°$ el cos θ es cero y el trabajo es cero.

Si $\theta > 90°$ el cos θ es negativo y el trabajo es negativo.

Si el trabajo de la fuerza $\vec{F}$ es positivo significa que el cuerpo incrementa su energía.

Si el trabajo es cero significa que sobre el cuerpo NO se está realizando trabajo alguno.

Si el trabajo de la fuerza $\vec{F}$ es negativo significa que el cuerpo disminuye su energía.

Ejemplo 6.1

Se empuja con una fuerza de $200N$, formando un ángulo d θ= 30^0 con la horizontal, un bloque de masa $20kg$, sobre una superficie horizontal cuyo coeficiente de rozamiento cinético es $\mu_k = 0.40$ como se indica en la figura 6.2. Si el bloque se desplaza 5 m.

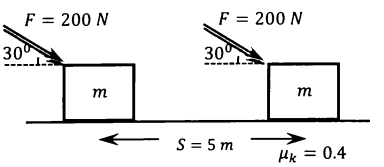


Figura 6.2

a) Determine las componentes rectangulares de la fuerza $\vec{F}$.
b) Determine la fuerza normal.
c) Determine la fuerza de fricción.
d) Calcule el trabajo realizado por cada una de las fuerzas.
e) Calcule el trabajo neto.

Solución.

a) Determinar las componentes rectangulares de la fuerza $\vec{F}$

Para resolver este ejercicio primero se recomienda realizar el diagrama de cuerpo libre y descomponer la fuerza $\vec{F}$ en sus componentes rectangulares.

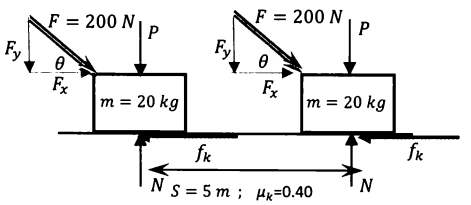


Figura 6.3

Las componentes en los ejes x y y son:

$$F_x = F\cos\theta = 200N\cos 30^0 = 173.2N$$

$$F_y = F\text{sen}\theta = 200N\text{sen}30^0 = 100N$$

b) Determinar la fuerza normal.

Para determinar la fuerza normal se debe realizar la sumatoria de fuerzas en y e igualar a cero y despejar la fuerza normal.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N - mg - F_y = 0$$

$$N = mg + F_y \rightarrow N = 20\ kg \times 9.8\frac{m}{s^2} + 100N = 296\ N$$

c) Determinar la fuerza de fricción.

Para determinar la fuerza de fricción se debe utilizar $f_k = -\mu_k N$

$f_k = -\mu_k N = -0.40 \times 296\ N = -118.4\ N$ *opuesta al movimiento.*

d) Calcular el trabajo realizado por cada una de las fuerzas.

El trabajo de cada una de las fuerzas se calcula con la ecuación 6.1

Trabajo de la fuerza F

El trabajo de la fuerza $\overrightarrow{F}$ será igual a $W_F = FScos\theta = 200\,N \times 5m \times cos30° = 866.03\,J$

El trabajo de la fuerza $\vec{F}$ también puede ser calculado como el trabajo realizado por sus fuerzas componentes en x y en y

El trabajo de F_x *es*: $W_{Fx} = F_x.S = 173.2N \times 5m = 866.02Nm = 866.02\,J$

El trabajo de F_y es exactamente igual a cero porque F_y es *perpendicular* al desplazamiento y por lo tanto NO realiza trabajo.

El trabajo de la fuerza $\vec{F}$ será sólo el realizado por la componente de la fuerza en x, porque ésta es paralela al desplazamiento y si realiza trabajo, mientras que la componente de la fuerza en y, como es perpendicular al desplazamiento, no realiza trabajo.

Trabajo del peso y la fuerza normal.

El trabajo del peso $W_\omega = mgScos90° = 0J$

El trabajo de la normal $W_N = NScos90° = 0J$

El trabajo es igual a cero porque el peso como la normal son fuerzas perpendiculares al desplazamiento por lo tanto **NO realizan trabajo** alguno.

El trabajo de la fuerza de fricción:

La fuerza de fricción y el desplazamiento forman un ángulo de 180^0 por lo tanto el trabajo estará dado por la siguiente expresión:

$W_{fk} = f_kScos180° = -f_kS = -118.4\,N \times 5m = -592\,J$

6.2 TRABAJO NETO O TRABAJO TOTAL

El trabajo neto es el trabajo total realizado por las fuerzas que están actuando sobre el cuerpo y se puede calcular de las siguientes formas:

1. ***El trabajo neto o total es la sumatoria algebraica de todos los trabajos realizados por cada una de las fuerzas.***

$$\sum_i^n W_i = W_F + W_\omega + W_N + W_{fk} \qquad (6.2)$$

Para el ejemplo 6.1 en el litera (e) se pide calcular el trabajo neto.

$$\sum_i^n W_i = 866.02\,J + 0 + 0 - 592\,J = +274\,J$$

2. ***El trabajo neto también se puede calcular por el trabajo realizado por la fuerza neta o resultante.***

La fuerza resultante es y es igual a cero $\sum F_y = 0$

La fuerza resultante en x es $\sum F_x = F_x - f_k = 173.2\,N - 118.4\,N = +54.8\,N.$

La fuerza resultante por lo tanto es +54.8 N

El trabajo realizado por la fuerza resultante se puede calcular con esta fuerza de la siguiente manera $W_{neto} = F_R S = +54.8\,N \times 5m = +274\,J$ lo cual coincide con el valor obtenido en el literal (e) del ejemplo 6.1.

Ejemplo 6.2

Un trabajador de una finca bananera está cargando un racimo de bananos de 10 kg y se desplaza horizontalmente 10 m hasta el camión de carga con rapidez constante. Con relación a la información proporcionada. Se pide, escoger la alternativa correcta.

a) El trabajo que la persona realiza sobre el racimo es 980J.
b) El trabajo realizado por la persona sobre el racimo es menor a 980 J.
c) El trabajo realizado por la persona sobre el racimo es mayor a 980 J.
d) El trabajo realizado por la persona sobre el racimo es igual a cero.

Solución.

Como la persona realiza una fuerza vertical sobre el racimo y se desplaza horizontalmente, entonces, la fuerza y el desplazamiento son perpendiculares; por lo tanto, el trabajo realizado por la persona sobre el racimo es cero.

Ejemplo 6.3

Se lanza un cuerpo de 20.0 kg de masa, hacia arriba, desde la terraza de un edificio de 100 m de altura como se indica en la figura 6.4. Si el cuerpo se desplaza verticalmente 5.00 m hasta alcanzar su altura máxima, entonces, el trabajo realizado por el peso es:

El trabajo realizado por el peso $W = mg\Delta ycos\theta$ y debido a que el desplazamiento con el peso son opuestos, entonces $\theta = 180^0$

$W = mg\Delta ycos180^0 = 20.0kg \times 9.8\,\frac{m}{s^2} \times 5.00\,m\,(-1)$

W= −980 J. Respuesta.

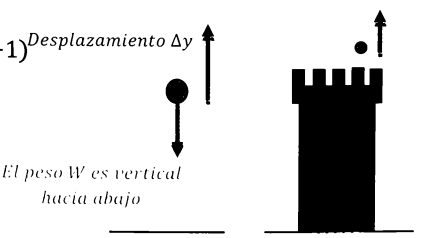


Figura 6.4

Ejemplo 6.4

Con relación al ejemplo 6.3 se pide:

a) Calcular el trabajo que realiza el peso cuando el cuerpo desciende desde su altura máxima hasta el punto donde fue lanzado.
b) Calcular el trabajo neto, es decir, el trabajo del peso en su trayectoria de subida y bajada del cuerpo.

Solución

a) El trabajo cuando el cuerpo desciende es $W = w\Delta y cos\theta$
El desplazamiento y el peso están en la misma dirección $\theta = 0^0$; por lo tanto:
$$W = mg\Delta y cos\theta = 20.0kg \times 9.8\frac{m}{m^2} \times 5.00m(1) = +980\,J$$

b) El trabajo neto es la sumatoria de los trabajos en la subida y en la bajada.
$$W_{neto} = W_{subida} + W_{bajada} = -980\,J + 980\,J = 0$$
Se puede concluir que el trabajo del peso, que es una fuerza gravitacional, en una trayectoria cerrada es exactamente igual a cero.

Figura 6.5

ACTIVIDAD 6.1

Se aplica una fuerza F=100 N, formando un ángulo de 30^0 con la horizontal, sobre un bloque de 200 kg, como se indica en la figura 6.6. El bloque se mueve a velocidad constante de 3 m/s y se desplaza 5 m. Se pide:

a) Calcular el trabajo de la fuerza F.
b) Calcular el trabajo de la fuerza de fricción.
c) Calcular el trabajo neto.

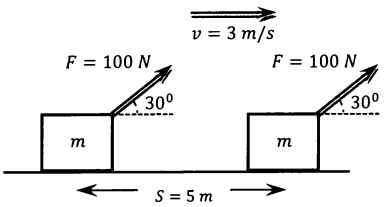


Figura 6.6

ACTIVIDAD 6.2

Se suelta un bloque de 40 kg, desde el reposo, en una pista como se muestra en la figura 6.7.

Calcular el trabajo realizado por el peso para ir del punto A hasta el punto B.

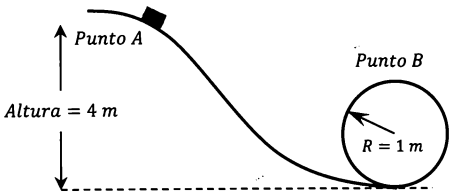


Figura 6.7

6.3 POTENCIA

En los ejercicios anteriores se calculó el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$, pero para fines prácticos no sólo es necesario conocer el trabajo o la energía involucrada en un proceso, sino también es importante conocer en qué tiempo se realiza este trabajo.

Por lo tanto aparece un término que se conoce con el nombre de POTENCIA y es la relación entre el trabajo y el tiempo empleado.

$$P = \frac{W}{\Delta t} \qquad (6.3)$$

Debido a que el trabajo se define como $\vec{F} \cdot \Delta x$, remplazando en la ecuación 6.3 queda:

$P = \frac{\vec{F} \cdot \Delta x}{\Delta t}$ y reconociendo que $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ es la velocidad:

$$P = Fv \qquad (6.4)$$

Las unidades de la potencia son: $\frac{J}{s} = Watt = Vatio$

1 HP es la unidad de potencia en el sistema Inglés y es equivalente a 746 watt.

$$1\,HP = 746\,watt$$

La empresa eléctrica en el Ecuador entrega mensualmente la factura a cada uno de los clientes y factura los kilovatios- hora (kwh) consumidos en el mes. Estos kwh corresponden al consumo mensual de energía eléctrica en los distintos hogares, oficinas o empresas. Por lo tanto el valor que los clientes pagan corresponde al consumo de energía.

$$1kW \cdot h = 1kW \cdot h \times \frac{1000W}{1kW} \times \frac{3600s}{1h} = 3.6 \times 10^6 J$$

Un kilovatio-hora equivale a 3600000 J.

ACTIVIDAD 6.3

Un motor eléctrico se lo usa para levantar un ascensor como se indica en la figura 6.8, a velocidad constante. La capacidad máxima de carga del ascensor es M= 1000 kg y entre las rieles laterales del ascensor existe una fuerza de fricción de 300 N. Si se conoce que el ascensor se mueve a velocidad constante de 2m/s. Se pide:

a) Calcular la potencia mínima requerida por el motor Eléctrico.
   Resp.: 20200 watt, 27 Hp
b) Si el ascensor parte del reposo con una aceleración de 1 m/s^2, determinar la potencia a los dos segundos de su movimiento.
   Resp.: 22200 watt, 29.75 Hp

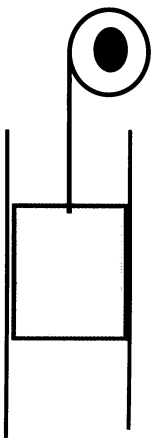


Figura 6.8

6.4 TRABAJO DE UNA FUERZA CONSTANTE

El trabajo de una fuerza constante es el producto de la fuerza paralela al desplazamiento por el desplazamiento. En un gráfico fuerza versus desplazamiento el trabajo representa el área bajo la curva y el signo indica si el cuerpo recibió o realizó trabajo. Ver figura 6.9.

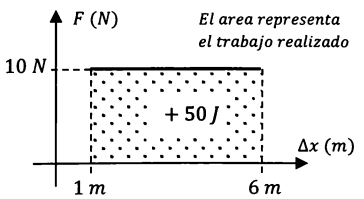


Figura 6.9

En este caso como el trabajo es positivo significa que sobre el cuerpo se realizó + 50 J de trabajo.

Ejemplo 6.5

Sobre un cuerpo de masa m se aplica una fuerza que varía con x como se indica en la figura 6.10.

Calcular el trabajo neto realizado por la fuerza $\vec{F}$ en [J]

El trabajo representa el área bajo la curva y en este caso corresponde a + 84 J

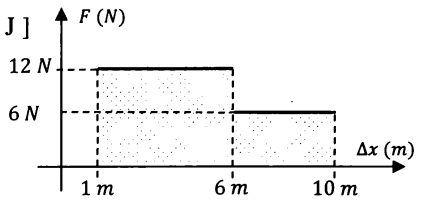


Figura 6.10

6.5 TRABAJO DE UNA FUERZA VARIABLE

El trabajo de una fuerza variable también está representado por el área bajo la curva y por lo tanto, el área bajo la curva representa el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$. Ver figura 6.11

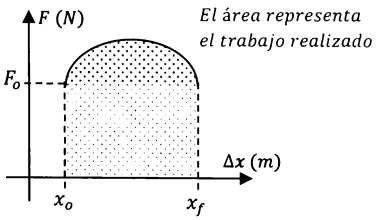


Figura 6.11

ACTIVIDAD 6.4

Si sobre un cuerpo se aplica una fuerza como se indica en la figura 6.12, entonces, el trabajo neto realizado por la fuerza $\vec{F}$ es:

a) 78 J b) 68 J c) 74 J d) 64 J e) 84 J

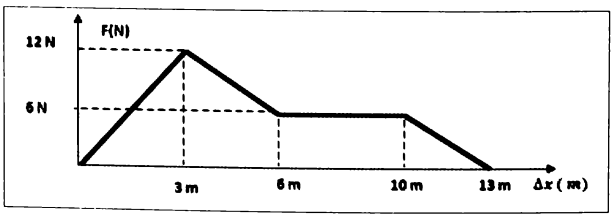


Figura 6.12

6.6 LEY DE HOOKE

Suponga que se tiene un resorte o muelle y se lo estira, el mismo presenta una resistencia a ese estiramiento debido a sus fuerzas internas que están relacionadas con su estructura atómica molecular y se llaman fuerzas elásticas.

La fuerza elástica es proporcional a la elongación del resorte, pero tiene un valor límite que se llama el límite elástico que significa el máximo valor hasta donde existe esta proporcionalidad.

Si el resorte o muelle se lo estira o comprime éste ejerce una fuerza contraria a dicha elongación y por lo tanto, la fuerza que experimenta el resorte puede ser descrita de la siguiente manera. Ver figura 6.13 y 6.13

$$F = -Ky, \qquad \textit{donde } K \textit{ es la constante elástica del resorte y sus unidades son } \frac{N}{m}$$

y representa la elongación del resorte, es decir, la cantidad que se estira o se comprime, medida desde su longitud natural.

Entiéndase por longitud natural la longitud que tiene el resorte sin deformación.

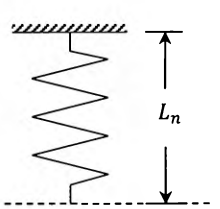


Figura 6.13

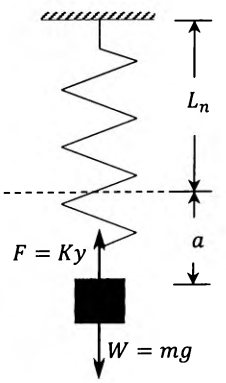


Figura 6.14

Si en el resorte se suspende un cuerpo de masa m, este se alarga una distancia (a), como se indica en la figura 6.14.

El resorte se alarga una distancia a y experimenta una fuerza contraria al peso que es la fuerza que lo está deformando.

Para evaluar la constante elástica del resorte se analiza cuando el sistema masa- resorte está en equilibrio.

En la condición de equilibrio, la sumatoria de fuerzas en y es igual a cero, por lo tanto, se tiene: $\sum F_y = 0 \rightarrow Ka - mg = 0 \rightarrow K = \frac{mg}{a}\left[\frac{N}{m}\right]$

Ejemplo 6.8

Un resorte mide un metro sin deformarse. Si se le suspende un cuerpo de masa 40 kg, la longitud final del resorte es 1.20m. Ver figura 6.15.

Se pide:

a) Calcular la constante del resorte.
b) Si una persona estira el resorte hasta una longitud final de 1.35 m ¿Cuál será la magnitud de la fuerza que experimenta el resorte?

Solución.

Parte a)

Para calcular la constante del resorte se analiza el resorte en equilibrio con el peso suspendido y se aplica la sumatoria de fuerzas igual cero.

$$K = \frac{mg}{a}\left[\frac{N}{m}\right] \rightarrow K = \frac{40\ kg \times 9.8\frac{m}{s^2}}{1.2m - 1.0m} = 1960\left[\frac{N}{m}\right]$$

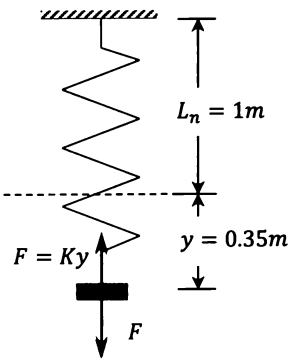


Figura 6.15

Parte b)

La magnitud de la fuerza que experimenta el resorte es $F = Ky$

$F = 1960\ \frac{N}{m}(1.35\ m - 1.0m) =$
686 *N dirigida hacia arriba*

6.7 FUERZA VARIABLE EXPERIMENTADA POR UN RESORTE

En las figuras 6.16 y 6.17, se puede observar la fuerza que experimenta el resorte cuando es estirado o comprimido.

En la figura 6.16 se puede observar que cuando se estira un resorte, el mismo experimenta un desplazamiento positivo $(+x)$, pero ejerce una fuerza negativa $(-F)$ opuesta a este desplazamiento.

De acuerdo a la figura 6.17 se puede observar que cuando se comprime un resorte, el mismo experimenta un desplazamiento negativo $(-x)$, pero el resorte ejerce una fuerza positiva $(+F)$ opuesta a este desplazamiento. Los dos casos pueden observarse en las siguientes figuras.

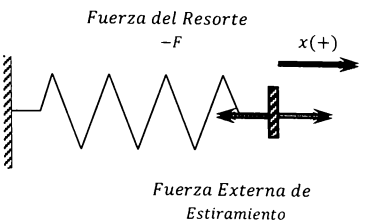


Figura 6.16

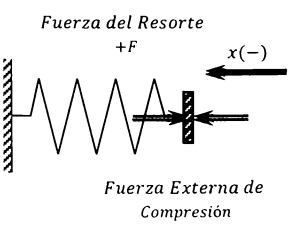


Figura 6.17

6.8 GRÁFICO FUERZA VERSUS DESPLAZAMIENTO PARA UNA FUERZA VARIABLE QUE EXPERIMENTA UN RESORTE

De acuerdo a las figuras 6.16 y 6.17, se puede realizar un gráfico fuerza versus desplazamiento, como se indica a continuación en la figura 6.18.

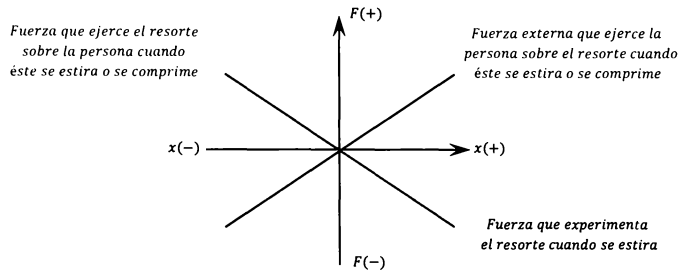


Figura 6.18

6.8.1 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA EXTERNA SOBRE UN RESORTE

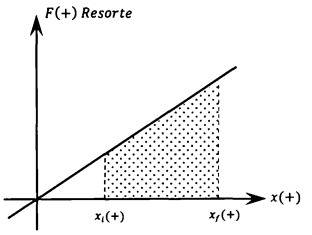


Figura 6.19

El área bajo la curva F versus x, mostrada en la figura 6.19, representa el trabajo realizado por una fuerza externa sobre un resorte cuando éste se estira.

El trabajo realizado por la fuerza externa sobre el resorte está dado por la siguiente expresión:

$W = \frac{1}{2}K(x_f^2 - x_i^2)$ *y representa el área bajo la curva F versus x.* *(6.5)*

Note que esta expresión es igual al área rayada de la figura 6.19

El trabajo realizado por el resorte sobre la persona está dado por la siguiente expresión:

$W = \frac{1}{2}K(x_i^2 - x_f^2)$ *donde* x_i *y* x_f, *corresponden a las elongaciones respectivas* *(6.6)*

6.9 TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGIA

Una fuerza $\vec{F}$ se aplica sobre un bloque de masa m y provoca un desplazamiento $\vec{S}$ como se indica en la figura 6.20

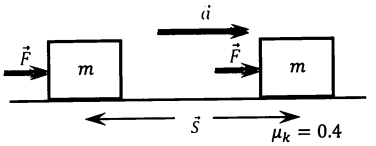


Figura 6.20

De acuerdo a la segunda ley de Newton la fuerza es la masa multiplicada por la aceleración. El trabajo es fuerza multiplicada por el desplazamiento.

$$W = FS = maS = m\left(\frac{v^2 - v_o^2}{2s}\right)S = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_o^2$$

El término $\frac{1}{2}mv^2$ se lo que se conoce como energía cinética, K

De lo anterior se tiene que el trabajo neto que corresponde a la sumatoria de todos los trabajos es igual al cambio de energía cinética ΔK.

TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

$$W = K_f - K_0 = \frac{1}{2}\boldsymbol{mv_f^2} - \frac{1}{2}\boldsymbol{mv_0^2} \qquad (6.7)$$

Ejemplo 6.9

Se empuja un bloque de $20.0kg$ de masa con una fuerza de $200N$ de magnitud que forma un ángulo $\theta = 30^0$ con la horizontal sobre una superficie horizontal de $\mu_k = 0.40$ como se indica en la figura 6.21. Si el bloque se desplaza $5.0m$ y parte con una velocidad inicial de $1.0\,{}^{m}/_{s}$:

a) Calcular el trabajo neto.
b) Aplicando el TEOREMA DEL TRABAJO Y ENERGÍA, calcular la velocidad que tiene el bloque a los 5.0 m de haberse desplazado.
c) Si en el instante en que el bloque se ha desplazado los 5.0m, se retira la fuerza F, determinar el desplazamiento adicional hasta detenerse. como se muestra en la figura 6.19

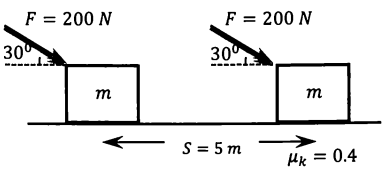


Figura 6.21

Solución.

a) Calcular el trabajo neto.

Para calcular el trabajo neto se recomienda calcular el trabajo de cada una de las fuerzas.

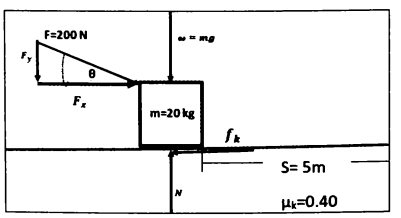


Figura 6.22

Las componentes en los ejes x y y son:

$$F_x = Fcos\theta = 200N \times cos30^0 = 173.2N$$

$$F_y = Fsen\theta = 200N \times sen30^0 = 100N$$

Determinar la fuerza normal.

Para determinar la fuerza normal se debe igualar la sumatoria de fuerzas en y a cero y despejar la fuerza normal.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N - mg - F_y = 0$$

$$N = mg + F_y \rightarrow N = 20\ kg \times 9.8\frac{m}{s^2} + 100N = 296\ N$$

Determinar la fuerza de fricción.

Para determinar la fuerza de fricción se debe utilizar $f_k = -\mu_k N$

$f_k = -\mu_k N = -0.40 \times 296\ N = -118.4\ N\ opuesta\ al\ movimiento.$

Calcular el trabajo realizado por cada una de las fuerzas.

El trabajo de cada una de las fuerzas se calcula con la ecuación 6.1

Trabajo de la fuerza F

El trabajo de la fuerza F será igual a $W_F = FScos\theta = 200\ N \times\ 5m \times cos30° = 866.03\ J$

Trabajo del peso y la fuerza normal.

El trabajo del peso $W_\omega = mgScos90° = 0J$

El trabajo de la normal $W_N = NScos90° = 0J$

El trabajo de la fuerza de fricción:

La fuerza de fricción y el desplazamiento forman un ángulo de 180^0 por lo tanto el trabajo estará dado por la siguiente expresión:

$$W_{fk} = f_k Scos180° = -f_k S = -118.4\ N \times 5m = -592\ J$$

El trabajo neto o total es la sumatoria algebraica de todos los trabajos realizados por cada una de las fuerzas.

$$\sum_i^n W_i = W_F + W_\omega + W_N + W_{fk}$$

$\sum_i^n W_i = 866.02\ J + 0 + 0 - 592\ J = +274\ J$ Esto es el trabajo neto.

b) Aplicando la ecuación 6.4 del **TEOREMA DEL TRABAJO Y ENERGÍA**, calcular la velocidad que tiene el bloque a los 5.0 m de haberse desplazado.

$$w_{NETO} = K_f - K_o = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_o^2$$

$$274\,J = \frac{1}{2}20.0\,kg \times v_f^2 - \frac{1}{2}20.0kg\left(1.0\,\frac{m}{s}\right)^2 \rightarrow v_f = 5.33\,\frac{m}{s}$$

c) Si en el instante en que el bloque se ha desplazado los 5.0m, se retira la fuerza F, determinar el desplazamiento adicional hasta detenerse.
En el momento en que se retira la fuerza F, cambia la magnitud de la normal y de la fuerza de fricción. En este desplazamiento sólo realiza trabajo la fuerza de fricción, desconociéndose este desplazamiento.

$$w_{NETO} = -f_k\Delta x = K_f - K_o = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_o^2$$

$$-78.4\,N\Delta x = 0 - K_o = 0 - \frac{1}{2}20\,kg\left(5.33\frac{m}{s}\right)^2 \rightarrow \boldsymbol{\Delta x = 3,63\,m}$$

6.10 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL

La energía potencial gravitacional *(U)* es la energía que poseen todos los cuerpos de masa *m* en función de su posición y depende de un nivel de referencia y está dada por la siguiente expresión $U = mgy$ Unidades en Joules [J]

donde *m* es la masa del cuerpo

g es la aceleración de la gravedad

¨*y*¨ es la posición con respecto a un nivel de

referencia N.R. Ver figura 6.23

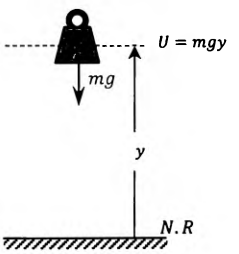


Figura 6.23

6.10.1 El trabajo realizado por una fuerza gravitacional en función de la energía potencial gravitacional

Si lanzamos un cuerpo hacia arriba desde una altura y_0 hasta una altura y_f, como se indica en la figura 6.24 se calculará el trabajo realizado por el peso.

El trabajo que realiza el peso se define como:

$$W = mg\Delta y cos180^0 = -mg(y_f - y_0)$$

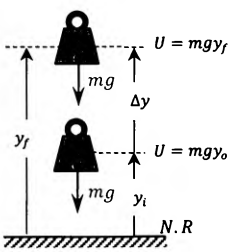


Figura 6.24

$$W = -\Delta U = U_0 - U_f = mgy_0 - mgy_f \qquad (6.8)$$

6.10.2 El trabajo realizado por una fuerza elástica en función de la energía potencial elástica

La energía potencial elástica de un resorte está dada por la siguiente expresión

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \; donde \; x \; es \; la \; elongación \; del \; resorte$$

El trabajo realizado por la fuerza elástica es:

$$W = -\Delta U = -(U_f - U_0) = U_0 - U_f = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

6.11 FUERZAS CONSERVATIVAS

Una fuerza es conservativa si cumple las siguientes condiciones:

1. El trabajo de una fuerza conservativa es independiente de su trayectoria, sólo depende de la posición inicial y final.
2. El trabajo de una fuerza conservativa en una trayectoria cerrada es exactamente igual a cero.

Un bloque de masa *m* se deja caer desde una altura *h*, en las dos trayectorias que se indican en figura 6.25. Calcular el trabajo realizado por el peso del bloque en las dos trayectorias hasta que el bloque llegue a la base de los planos.

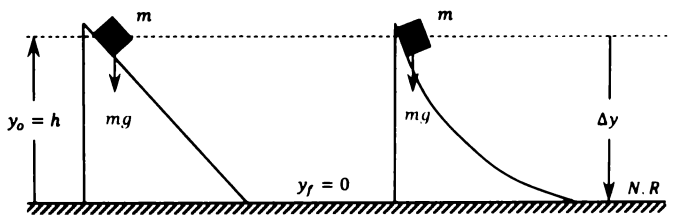


Figura 6.25

Para las dos trayectorias el trabajo del peso está dado por la siguiente expresión:

$$W = -\Delta U = -(U_f - U_0) = U_0 - U_f = mgY_0 - mgY_f = mgh - 0 = mgh$$

Si lanzamos el bloque de masa *m* verticalmente hacia arriba éste alcanzará una altura h y luego regresará hasta la misma posición de lanzamiento. Entonces, el trabajo del peso en su trayectoria cerrada será exactamente igual a cero, porque las energías potencial inicial y final son las mismas. $W = -\Delta U = -(U_f - U_0) = U_0 - U_f = 0$

Por lo tanto, la fuerza gravitacional llamada peso es una fuerza conservativa. Así también lo es la fuerza elástica, la fuerza eléctrica, etc.

6.12 FUERZAS NO CONSERVATIVAS

Una fuerza es NO conservativa si cumple las siguientes condiciones:

1. El trabajo de una fuerza NO conservativa depende de su trayectoria.
2. El trabajo de una fuerza NO conservativa en una trayectoria cerrada NO es igual a cero.

Un bloque de masa m recorrerá una trayectoria cerrada, cuadrada de lado d, sobre una mesa horizontal como se observa en la vista superior de la figura 6.26. Si la fuerza de fricción es f_k, determinar el trabajo realizado por la fuerza de fricción durante toda su trayectoria.

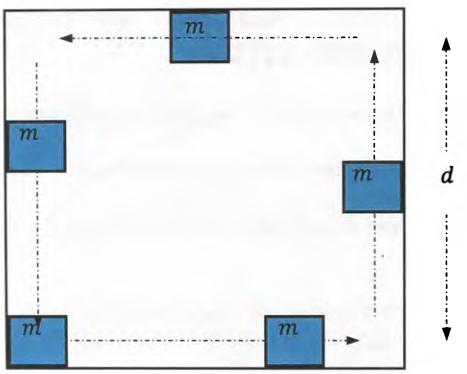


Figura 6.26

El trabajo de la fuerza de fricción en cada lado es $-f_k d$ y el trabajo en toda su trayectoria es $-4f_k d$, por lo tanto, el trabajo de la fuerza de fricción si depende de la trayectoria y en una trayectoria cerrada el trabajo es diferente de cero.

Por lo tanto la fuerza de fricción es una fuerza **NO CONSERVATIVA.**

6.13 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Como se conoce que el trabajo neto es igual al cambio de energía cinética de acuerdo al teorema del trabajo y la energía.

$$W_{neto} = K_f - K_o$$

Si consideramos que todas las fuerzas son conservativas, entonces tenemos un sistema conservativo y por lo tanto el trabajo neto estará dado en función de la energía potencial.

$$W_{neto} = U_0 - U_f$$

Por lo tanto, se puede igualar el trabajo neto y se obtiene la siguiente expresión:

$$U_0 - U_f = K_f - K_o \rightarrow U_0 + K_o = U_f + K_f$$

El término $U + K$ es lo que se conoce con el nombre de Energía Mecánica E.

$$E_0 = U_0 + K_o \quad \text{Energía mecánica inicial} \tag{6.9}$$

$$E_f = U_f + K_f \quad \text{Energía mecánica final} \tag{6.10}$$

$$U_0 + K_o = U_f + K_f \quad \text{La Energía mecánica es constante} \tag{6.11}$$

Por lo tanto para sistemas conservativos la Energía Total Mecánica se mantiene constante $E_0 = E_f$

El término U representa la energía potencial gravitacional (mgy) o la energía potencial elástica $(\frac{1}{2}kx^2)$.

ACTIVIDAD 3

Escoja la alternativa **incorrecta**

a) La energía cinética siempre es positiva.
b) Si en el sistema sólo actúan fuerzas gravitacionales y elásticas, entonces, la energía total mecánica se mantiene constante.
c) La energía total mecánica es siempre positiva.

Ejemplo 6.10

Se deja caer un bloque de masa *m* desde el punto *A* como se indica en la Figura 6.27. Se pide:

a) Calcular la velocidad del bloque en el punto B.
b) Si se conoce que la masa *m=10 kg* y el radio *R=2 m*, entonces, calcular la energía total mecánica en el punto C, con respecto al nivel de referencia indicado en la figura.

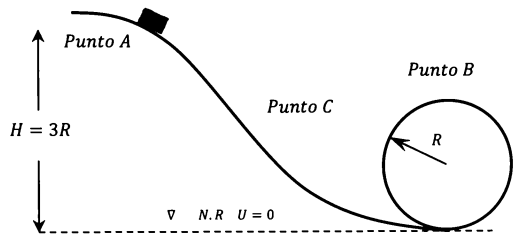


Figura 6.27

Solución

a) Calcular la velocidad del bloque en el punto B.

Como el sistema es conservativo la energía mecánica se conserva.

$$U_0 + K_o = U_f + K_f \quad \text{La energía mecánica es constante}$$

$$mg(3R) + 0 = mg(2R) + \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2(3gR - 2gR)}$$

$$v = \sqrt{2(1\text{gR})} = \sqrt{2\left(9.8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 2\text{m}\right)} = 6.26\frac{m}{s}\text{, } la\ velocidad\ en\ B$$

b) Calcular la energía total mecánica en el punto C.

$$E = 10kg \times 9.8\frac{m}{s^2} \times 3 \times 2m = 588\,J\ es\ la\ misma\ en\ A, B\ y\ en\ C$$

Ejemplo 6.11

Un bloque de 20.0 kg comprime un resorte de K=1500 N/m una distancia de 0.60 m desde su posición de equilibrio. Si el bloque y resorte descansan sobre un plano inclinado de 30^0, y si el plano inclinado es de fricción despreciable. como se muestra en la figura 6.28, calcular la máxima altura que alcanza el bloque, medida desde su punto de lanzamiento.

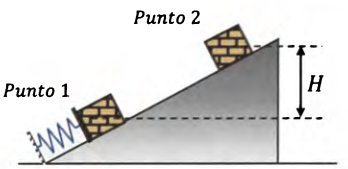


Figura 6.28

Solución

Como en el sistema sólo hay fuerzas gravitacionales y elásticas el sistema es conservativo y se aplica conservación de la energía mecánica entre los puntos 1 y 2.

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \quad \text{La energía mecánica es constante}$$

$$U_{1grav} + U_{1elast} + K_o = U_{2grav} + U_{2elast} + K_2$$

$$0 + \frac{1}{2}kx_1^2 + 0 = mgH + 0 + 0 \rightarrow \text{H} = \frac{1}{2mg}kx_1^2$$

$$\text{H} = \frac{1}{2mg}kx_1^2 = \frac{1}{2 \times 20.0kg \times 9.8\frac{m}{s^2}}\left(1500\frac{N}{m}\right)(0.60m)^2 = 1.38\,m$$

6.14 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA PARA SISTEMAS CON FUERZAS NO CONSERVATIVAS

Del Teorema del trabajo y la energía se tiene que el trabajo neto es la sumatoria de los trabajos de las fuerzas conservativas y las no conservativas y esto será igual al cambio de energía cinética.

$$W_{neto} = K_f - K_o$$

$$W_{neto} = W_{F.C} + W_{F.NC} = K_f - K_o$$

$$W_{F.C} = U_0 - U_f\text{, } es\ el\ trabajo\ de\ las\ fuerzas\ conservativas$$

$$W_{neto} = U_0 - U_f + W_{F.NC} = K_f - K_o$$

Despejando el trabajo de las fuerzas no conservativas se tiene la siguiente expresión:

$$W_{F.NC} = (U_f + K_f) - (K_o + U_o) = E_f - E_0 = \Delta E \qquad (6.12)$$

$$E_f = U_f + K_f, \qquad energía\ mecánica\ final$$

$$E_0 = K_o + U_o, \qquad energía\ mecánica\ inicial$$

Por lo tanto el trabajo de las fuerzas no conservativas está dado por la diferencia de la energía mecánica $W_{F.NC} = E_f - E_0$.

En los sistemas donde intervienen fuerzas **NO CONSERVATIVAS** la energía mecánica **NO SE CONSERVA**.

Ejemplo 6.12

Un bloque de masa *m* se suelta desde el reposo en la posición *A* y recorre un cuadrante de circunferencia de radio *R= 4 m* sin fricción, hasta llegar al punto *B*como se indica en la figura 6.29. Luego sigue una trayectoria rectilínea sobre una pista horizontal de μ_k=0.45. Se pide:

a) Calcular la velocidad del bloque cuando abandona el cuadrante (en el punto *B*).
b) Calcular la distancia que recorre el bloque sobre la pista horizontal hasta detenerse en el punto *C*.

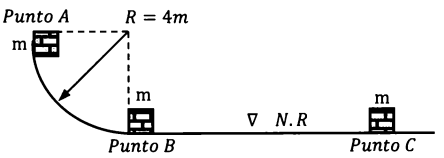


Figura 6.29

Solución.

En el cuadrante circular no hay fricción por lo tanto la energía mecánica se conserva entre los puntos *A* y *B*.

$$U_A + K_A = U_B + K_B \quad \text{La energía mecánica es constante}$$

$$mgR + 0 = 0 + \frac{1}{2} mV_B^2 \rightarrow V_B = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times 9.8 \frac{m}{s^2} \times 4m} = 8.85 m/s$$

Para analizar el tramo de *B* hasta *C* debe considerar que existe trabajo de las fuerzas no conservativas.

$$W_{F.NC} = (U_C + K_C) - (K_B + U_B) = (0 + 0) - \left(\frac{1}{2} mv_B^2 + 0\right)$$

$$-u_k mgd = -\left(\frac{1}{2} mv_B^2 + 0\right)$$

$$u_k mgd = \frac{1}{2} mv_B^2 \rightarrow d = \frac{1}{2u_k g} v_B^2 = \frac{(8.85\ m/s)^2}{2 \times 0.45 \times 9.8 \frac{m}{s^2}} = 8.88\ m$$

ACTIVIDAD 6.4

Sobre un bloque de masa $m= 2.0\ kg$, se aplica una fuerza constante de $20.0\ N$ con un ángulo de 30^0 con la horizontal, como se muestra en la figura 6.30. Si el bloque se desplaza una distancia $d= 4m$, sobre una superficie horizontal y sin fricción y luego comprime al resorte de constante $K=500\ N/m$, una distancia x y se detiene. Se pide:

a) Calcular la velocidad del bloque al momento de impactar en el resorte.
b) Calcular la distancia x que se comprime el resorte hasta que el bloque se detiene.

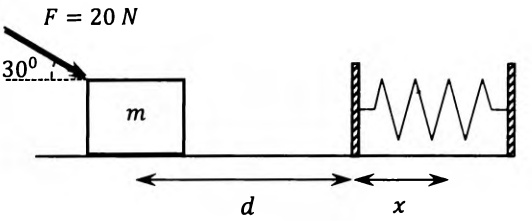


Figura 6.30

ACTIVIDAD 6.5

Un collarín de masa ***16 kg*** se desliza verticalmente partiendo del reposo desde la posición A hasta la posición B, como se indica en la figura 6.31. Si el resorte tiene una constante elástica de $k=1500\ N/m$ y una longitud natural de $L=1.2\ m$. Se pide:

a) Calcular la energía total mecánica considerando que el nivel de referencia está ubicado en la posición B.
b) Calcular la velocidad del collarín cuando pasa por la posición B.

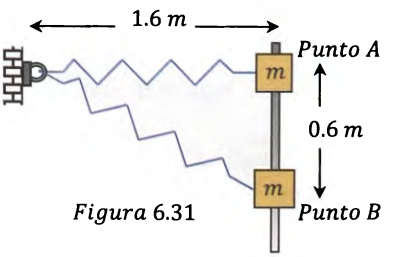


Figura 6.31

ACTIVIDAD 6.6

Un bloque de masa m= *100 kg* se mueve sobre un plano inclinado $\theta = 30^0$ como se muestra en la figura 6.32. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie del plano inclinado es $u_k = 0.30$ y asciende con una rapidez constante de *6.0 m/s*. Si el bloque es arrastrado por un motor, se pide:

a) Calcular la mínima potencia que debe tener el motor para mover el bloque sobre el plano inclinado a velocidad constante.
b) Calcular la potencia en **función de la velocidad** del motor para que pueda subir el bloque partiendo del reposo con una aceleración de *1.0* m/s^2.

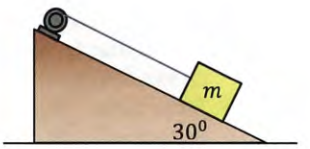


Figura 6.32

ACTIVIDAD 6.7

Un bloque de masa m es lanzado sobre una superficie horizontal con una velocidad de *10 m/s*. Los coeficientes de fricción cinético y estático entre el bloque y el piso son 0.20 y 0.40 respectivamente. Utilizando métodos energéticos se pide:

a) Determinar el trabajo realizado por la fuerza de fricción.
b) Determinar el desplazamiento total del bloque.

ACTIVIDAD 6.8

Una fuerza *F* se aplica sobre el bloque de *30 kg* de masa y éste empuja a un bloque de *10 kg* como se indica en la figura 6.33. Si el sistema constituido por dos bloques parte desde el reposo y alcanza una velocidad de *10 m/s* desplazándose *10 m* sobre una superficie horizontal plana y sin fricción. Utilizando métodos energéticos, se pide:

a) Determinar la *fuerza F.*
b) Determinar la velocidad media de los bloques en ese desplazamiento.
c) Determinar el tiempo empleado para este desplazamiento.
Respuesta: a) 200 N b) 5 m/s c) 2 s

Figura 6.33

ACTIVIDAD 6.9

En el sistema mostrado en la figura 6.34 se tienen dos masas de *10* y *20 Kg* respectivamente. Si el sistema parte desde el reposo y la masa de *20 Kg* está inicialmente a *3 m* sobre el piso. Utilizando conservación de la energía determinar la velocidad con que impacta el bloque de *20* kg sobre el piso. Respuesta: 4.43 m/s

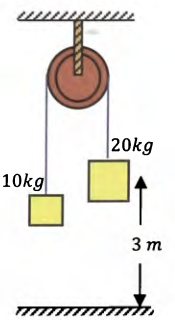
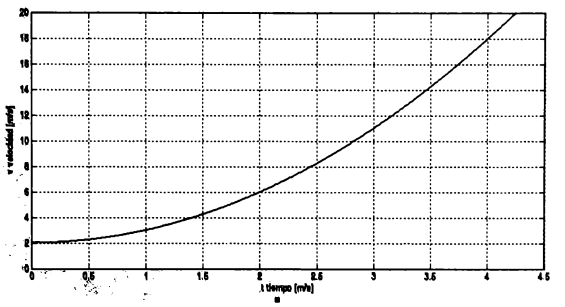


Figura 6.34

PROBLEMAS PROPUESTOS

EN LOS PROBLEMAS PROPUESTOS TRABAJAR CON g=10 m/s^2

1. El gráfico de mostrado, velocidad versus tiempo, representa el movimiento de un objeto de masa $m = 2\,[kg]$ sobre una superficie inclinada con un coeficiente de rozamiento cinético de $\mu_k = 0.2$ y una inclinación de $\theta = 30^0$. Determine el trabajo neto del objeto desde el punto de partida $t = 0\ s$ hasta los $4\ s$.

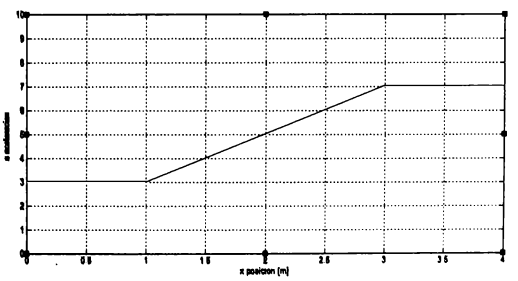


2. Un pintor se encuentra a *5 m* de altura sobre un andamio pintando un edificio. Si por un descuido se deja caer uno de los tarros de pintura de *5 kg*, ¿Cuál sería el trabajo realizado sobre aquel tarro de pintura hasta llegar al suelo?

3. Si a un resorte de constante elástica k_1 se lo deforma una distancia de x_1 y a otro resorte de constante elástica k_2 se lo deforma tres veces la longitud x_1. Si el cambio de energía ejercido en cada uno de los resortes por el estiramiento es el mismo, entonces. ¿Cuál sería la relación de las constantes de cada resorte $\frac{K_2}{K_1}$?

4. Un carro de juguete de *1 kg* de masa se mueve sobre una trayectoria circular de radio *2m*, a rapidez constante de *5 m/s*. Si su desplazamiento es de $\vec{S}$=-2i + 2j. ¿Cuál fue el trabajo neto durante todo el recorrido?

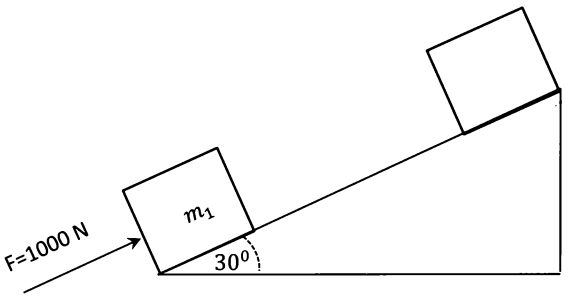
5. El gráfico de la figura, aceleración versus tiempo, corresponde el movimiento de un cuerpo de masa $m = 2$ [kg] sobre una superficie plana. Determine el trabajo neto del objeto durante todo su recorrido.



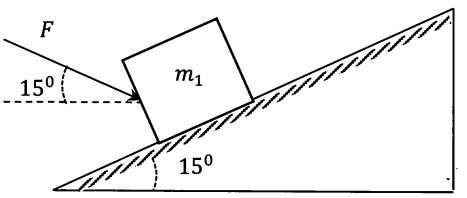
6. Se aplica una fuerza *F de 1000 N* sobre el bloque de masa m_1, paralela al plano inclinado a 30^0, como se indica en la figura. Si la masa m_1 es de *50 kg.* y el desplazamiento del bloque es 3m.

a) Determine el trabajo realizado por la fuerza F y por el peso.

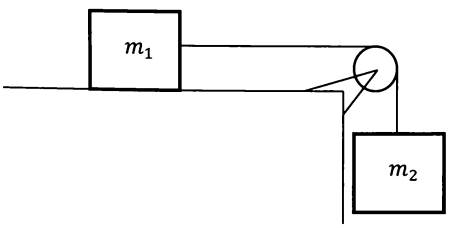
b) Determine el trabajo neto.



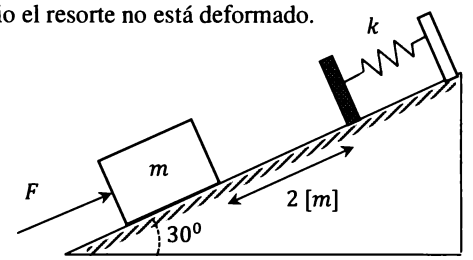
7. Un bloque de masa $m = 10\ [kg]$ asciende sobre un plano inclinado cuyo coeficiente de rozamiento cinético es de $\mu_k = 0.3$, determine el trabajo neto del bloque cuando se desplaza verticalmente una distancia de *5[m],* sabiendo que parte con una velocidad de 1 $[m/s]$ y llega con una velocidad de 3 $[m/s]$.



8. El siguiente sistema está formado por dos bloques, uno de los cuales de masa $m_1 = 10$ [kg] se encuentra sobre una plataforma horizontal lisa y atado con el segundo bloque de masa $m_2 = 2$ [kg] por medio de una cuerda y una polea de masas despreciables. Si el sistema se suelta desde el reposo y el bloque de masa m_2 se desplaza 3m. Determine la rapidez de cada bloque.



9. El sistema masa resorte se mantiene en reposo, tal como se muestra en la figura. Si se le aplica una fuerza externa hacia arriba paralela al plano inclinado de F = 10 [N], determine la máxima compresión del resorte, sabiendo que la masa del objeto es m = 1 [kg], el plano tiene un coeficiente de rozamiento cinético de $\mu_k = 0.5$, el resorte tiene una constante de k = 100 [N/m] y al inicio el resorte no está deformado.

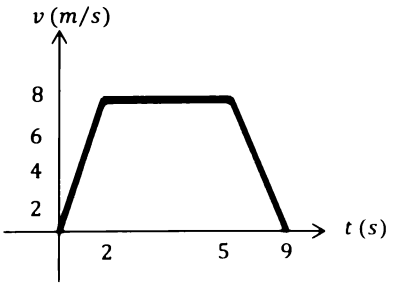


10. Un objeto de *4 kg* es lanzado verticalmente hacia arriba y cuando llega a su altura máxima su energía mecánica es 200 [J]. Determine la velocidad con la que fue lanzado el objeto desde el piso.

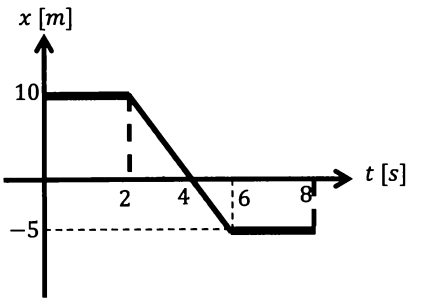
11. Un objeto se lanza desde la terraza de un edificio con una energía mecánica de 450 [J]. Sabiendo que la energía potencial del objeto al pasar por un punto ubicado a 20 [m] por debajo del punto de partida es −200 [J]. Determine la velocidad con la que fue lanzado el objeto, la altura máxima del objeto y la velocidad con la que pasa por el punto ubicado bajo los 20[m]. .

12. Sobre un objeto actúan las siguientes fuerzas: $\vec{F}_1 = (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 3\hat{k})$ [N] , $\vec{F}_2 = (-1\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 4\hat{k})$ [N] y $\vec{F}_3 = (-\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k})$ [N]. Determine el trabajo de cada una de las fuerzas y el trabajo neto para desplazar al objeto del punto $(2, -3, 4)$ [m] al punto $(6, -8, -5)$ [m].

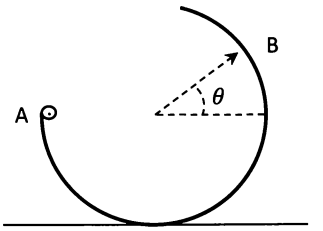
13. Una fuerza F = 10 [N] actúa sobre un bloque de masa m = 2 [kg] que se mueve en línea recta. En la figura se muestra una gráfica velocidad versus tiempo. Determinar el trabajo realizado por la fuerza F durante todo el recorrido.



14. Una fuerza F = 10 [N] actúa sobre un bloque que se mueve en línea recta. En la figura se muestra una gráfica posición versus tiempo. Determinar el trabajo realizado por la fuerza F durante todo el recorrido.

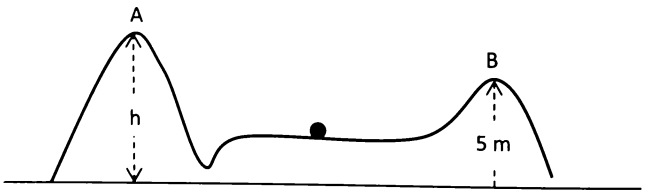


15. Determine la rapidez mínima con la que una canica debería lanzarse desde un punto A para alcanzar a desplazarse angularmente un ángulo $\theta = 30^0$ hasta un punto B, sobre una pista vertical lisa de radio 2 [m].



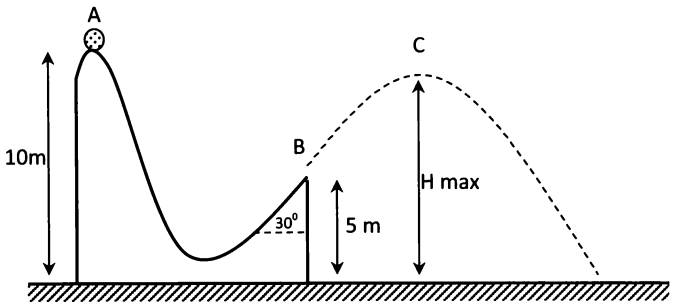
16. Determine cuánto se debería comprimir el resorte para que un cuerpo complete su recorrido (desde el punto A hasta el punto C). La masa del cuerpo es de 1 kg, la constante del resorte es de 500 [N/m], el radio de la trayectoria circular es de 2 [m] y desde A hasta B hay 16 m de longitud, además existe un coeficiente de fricción cinético de 0.20.

17. Un cuerpo logra pasar con una velocidad de *8 m/s* sin problemas por un punto *B* que se encuentra en un pista sin fricción. Si el cuerpo pasa por el punto *A* con una rapidez de *2* [m/s]. ¿Cuál debe ser la altura *h* que debe tener la pista medida desde el suelo?



18. Una pelota se la deja caer desde un punto *A* sobre una superficie lisa tal como se muestra en la figura. Si en un punto *B* se termina la pista y la parte final de la misma forma un ángulo de 30^0 con la horizontal, luego de ser despedida la pelota de la pista. Se pide:

a) Determinar la magnitud de la velocidad de la pelota en el punto B.
b) Determinar la magnitud de la velocidad de la pelota con la que impacta en el piso.



CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

CAPÍTULO 7

En la física existe un término denominado "cantidad de movimiento" que tiene relación con la masa y la velocidad de un objeto. Una pelota de fútbol que se mueve a una velocidad $\vec{v}$ tendrá menor cantidad de movimiento que si se mueve a una velocidad $2\vec{v}$. En este caso se ha duplicado la velocidad y se ha mantenido la misma masa, por lo tanto la cantidad de movimiento se ha duplicado. Esto implica que la cantidad de movimiento es directamente proporcional a la rapidez. Se observa también que si la masa del objeto se duplica pero se mantiene la misma velocidad, la cantidad de movimiento se duplicará.

Como ya se ha estudiado la conservación de la energía, en este capitulo se estudiará la "conservación de la cantidad de movimiento", debido a que este tema es una gran herramienta en la resolución de problemas.

7.1 CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Si un objeto de masa m se desplaza con una velocidad $\vec{v}$, se dice que la masa tiene una cantidad de movimiento definida por:

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (6.1)$$

Debido a que la velocidad es un vector y la masa un escalar, la cantidad de movimiento es un vector. Además, de la fórmula anterior se observa que la cantidad de movimiento y la velocidad siempre tendrá la misma dirección.

Las unidades de la cantidad de movimiento en el sistema internacional S:I. son: $kg \cdot {}^{m}/_{s}$ siendo sus dimensiones $[MLT^{-1}]$.

Debido a que la cantidad de movimiento es un vector, implica que tendrá componentes en los 3 ejes coordenados *x, y, z,* de esta forma:

$p_x = mv_x$. Cantidad de movimiento en la dirección x

$p_y = mv_y$. Cantidad de movimiento en la dirección y

$p_z = mv_z$. Cantidad de movimiento en la dirección z

En este texto nos limitaremos a trabajar con las cantidades de movimiento en un plano, es decir, en los ejes x y y solamente.

En el capítulo de Dinámica de la Partícula se introdujo el término Fuerza y se lo definió como la rapidez de variación de la cantidad de movimiento lineal de una partícula. Al decir "rapidez" implica que la cantidad de movimiento varía con el tiempo. Si por $\Delta\vec{p}$ nos

referimos a la variación de la cantidad de movimiento lineal y por Δt a la variación del tiempo en el que el cambio de la cantidad de movimiento ocurre, matemáticamente, la fuerza se define como:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \qquad (6.2)$$

Remplazando la ecuación *(6.1)* en la ecuación *(6.2)* se obtiene:

$$\vec{F} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t}$$

Si la masa es constante: $\vec{F} = \frac{m\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ y reconociendo que $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ es la aceleración, se puede expresar la fuerza como:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Así es como llegamos a la fórmula familiar que denominamos Segunda Ley de Newton.

7.2 IMPULSO

La ecuación *(6.2)* puede escribirse como:

$$\vec{F}\Delta t = \Delta \vec{p} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i \qquad (6.3)$$

A la cantidad encerrada por el círculo se le da el nombre de IMPULSO $(\vec{I})$. Se observa, por lo tanto, que el impulso es una cantidad vectorial y es igual al cambio de la cantidad de movimiento lineal de una partícula.

$$\vec{I} = \Delta \vec{p} \qquad (6.4)$$

A este resultado se le da el nombre de "Teorema del Impulso y la Cantidad de Movimiento"

Las unidades del impulso son: $kg \cdot {}^{m}/_{s}$

Para calcular el impulso dado por la ecuación *(6.3)* se debe conocer cómo varía la fuerza en función del tiempo. Es muy complicado conocer en qué forma la fuerza varía con el tiempo porque ésta representa la interacción entre dos cuerpos que se golpean uno al otro. Por ejemplo, un futbolista que patea una pelota experimenta una fuerza variable mientras está en contacto con la pelota, y al mismo tiempo la pelota también experimenta una fuerza variable. Además, tratar de medir el tiempo en que están en contacto es complicado. Por lo

tanto, se supondrá que la fuerza que ejerce el pié del futbolista sobre la pelota será constante pero que produzca un mismo impulso.

El diagrama de la figura representa la fuerza vs. tiempo del golpe entre el pie del futbolista y la pelota, de forma aproximada.

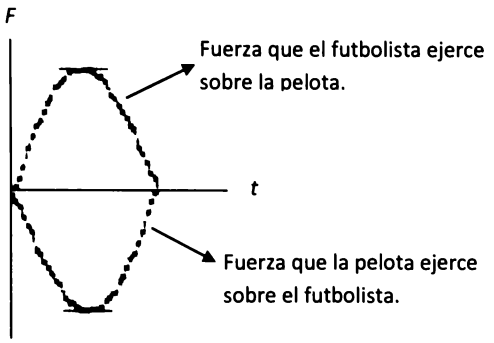


Figura 7.1

La curva que se encuentra sobre el eje del tiempo representa la fuerza que el futbolista ejerce sobre la pelota, mientras que la curva que se encuentra debajo del eje del tiempo representa la fuerza que la pelota ejerce sobre el futbolista. Como puede observarse, las dos curvas son idénticas excepto que la una es positiva y la otra es negativa.

El área encerrada por la curva que se encuentra arriba del eje del tiempo representa el impulso ($F\Delta t$).

En la figura (7.2) se ha trazado una línea horizontal que representa la fuerza promedio entre el futbolista y la pelota, y el área sombreada debe ser igual al área bajo la curva. De esta manera, el impulso es el mismo y la fuerza promedio se puede calcular con mayor facilidad.

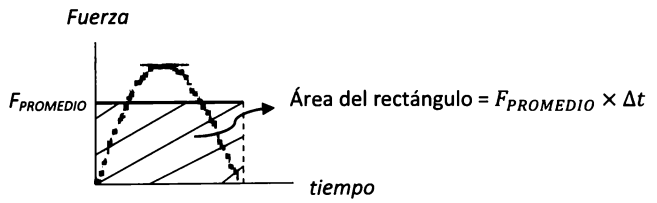


Figura 7.2

Usando la fuerza promedio el impulso será igual a:

$I = F\Delta t$ donde F representa la fuerza promedio.

Si, de todas formas se tiene alguna dificultad en calcular el impulso usando la fuerza promedio, podríamos entonces calcular el cambio de la cantidad de movimiento, recordando que el impulso es igual a:

$$I = mv_f - mv_i \qquad (6.5)$$

Ejemplo 7.1

Usando el gráfico dado a continuación, calcule el impulso y el cambio en la cantidad de movimiento de cierto objeto.

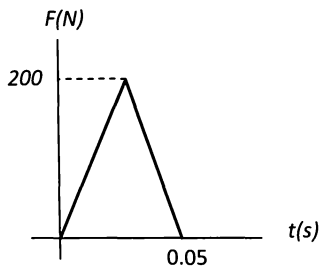


Figura 7.3

Solución

El Impulso representa el área encerrada por el triángulo en el gráfico $F\ vs.\ t$ que se muestra en la figura.

$$I = \frac{1}{2}(0.05s \times 200N) = 5N.s$$

Se puede demostrar que las unidades $N.s$ equivale a $kg.\,{}^{m}/_{s}$ que son las unidades que usamos anteriormente.

Para calcular la cantidad de movimiento del objeto simplemente tenemos que recordar que el Impulso es igual al cambio de la cantidad de movimiento lineal de un objeto. Por lo tanto:

$$\Delta p = 5N.s$$

Ejemplo 7.2

Un futbolista patea una pelota de fútbol # 5 cuya masa es de 450 gramos que inicialmente está en reposo imprimiéndole una velocidad de $50.0\,{}^{m}/_{s}$. El tiempo de contacto entre el pie del futbolista y la pelota de 0.10 segundo. ¿Cuál es la fuerza promedio en este choque?

Solución

El Impulso está dado por la expresión: $I = F\Delta t$. Por lo tanto, se puede despejar la fuerza lo cual queda:

$$F = \frac{I}{\Delta t}$$

donde el Impulso está dado por:

$$I = p_f - p_i = mv_f - mv_i \qquad (6.6)$$

Como la pelota parte del reposo, la velocidad inicial será igual a cero, entonces:

$$I = mv_f \qquad (6.7)$$

y remplazando en la expresión para F se tiene:

$$\overline{F} = \frac{mv_f}{\Delta t} = \frac{0.450kg \times 50.0 {}^{m}\!/\!_{s}}{0.10s}$$

$$\overline{F} = 225N$$

En un tiro libre como se muestra en la figura, el futbolista patea la pelota imprimiéndole una velocidad a la misma. El tiempo de contacto entre el pie del futbolista y la pelota es sumamente pequeño. Observe la posición del pie del jugador, lo que nos muestra que la pelota es enviada con efecto. Seguramente esta jugada produjo un gol.

Ejemplo 7.3

Cuál es la cantidad de movimiento total de dos partículas de masas $m_1 = 1.0kg$ y $m_2 = 2.0kg$ las cuales se mueven perpendicularmente con rapideces de $3.0\,^{m}/_{s}$ y $2.0\,^{m}/_{s}$ respectivamente. Observe el gráfico de la figura 7.4. $tan^{-1}1.33 = 53^0$

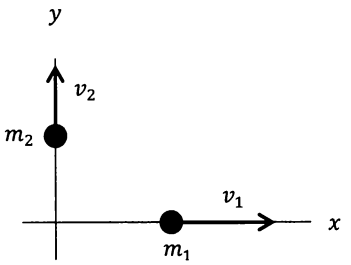


Figura 7.4

Solución

En este problema se debe tener mucho cuidado de que la suma de las dos cantidades de movimiento es una suma vectorial. Es decir, se debe aplicar las reglas para sumar dos vectores en un plano. Primero, calcularemos las magnitudes de las cantidades de movimiento de cada una de las masas.

La cantidad de movimiento de la masa m_1 es:

$$p_1 = m_1 v_1 = 1.0kg \times 3.0\,^{m}/_{s} = 3.0kg\,^{m}/_{s} \quad \text{dirigida hacia la derecha.}$$

La cantidad de movimiento de la masa m_2 es:

$$p_2 = m_2 v_2 = 2.0kg \times 2.0\,^{m}/_{s} = 4.0kg\,^{m}/_{s} \quad \text{dirigida hacia arriba.}$$

Estas dos cantidades de movimiento lineal son vectores pues tienen magnitud y dirección. Por lo tanto, serán graficados en el plano xy y se procederá a calcular el vector suma.

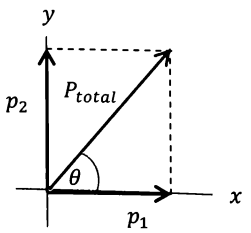


Figura 7.5

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$P_{total} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{\left(3.0kg\,m/s\right)^2 + \left(4.0kg\,m/s\right)^2}$$

$$P_{total} = 5.0kg \cdot m/s$$

Como todo vector debe tener magnitud y dirección, calcularemos la dirección con respecto al eje positivo de las x.

$$\tan\theta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{4.0}{3.0} = 1.33$$

$$\theta = 53^0$$

En este ejercicio ha sido necesario expresar a las cantidades de movimiento de los dos cuerpos como vectores. Cuando los problemas son en una sola dimensión consideraremos que hacia la derecha es positivo y hacia la izquierda es negativo. En este caso no habrá que considerar a las cantidades de movimiento como vectores sino solamente como escalares, ya que si el movimiento es en una sola dirección, solamente hay dos posibilidades, o es positivo o es negativo.

7.3 CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

En el ejemplo 7.3 de la sección anterior, se calculó la cantidad de movimiento total de un sistema formado por dos partículas que era igual a la suma de las cantidades de movimiento lineales de cada una de las dos masas. Si tuviéramos más objetos con masas y velocidades diferentes, la cantidad de movimiento total sería igual a la suma de todas las cantidades de movimiento de todas las masas.

$\vec{P}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n$ suponiendo que hay n partículas que forma el sistema.

La variación de la cantidad de movimiento está dada por:

$$\Delta\vec{P}_{tot} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 + \ldots + \Delta\vec{p}_n \qquad (6.8)$$

y dividiendo todo para Δt se obtiene:

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} + \ldots + \frac{\Delta \vec{p}_n}{\Delta t}$$

De acuerdo a la segunda ley de Newton $\vec{F} = {}^{\Delta \vec{p}}/_{\Delta t}$ se tiene que:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$$

$$\vec{F}_{tot} = \sum \vec{F}_i \qquad (6.9)$$

Lo último se lee: la fuerza total que actúa sobre un sistema de partículas es igual a la "sumatoria de todas las fuerzas que actúa sobre cada una de las partículas del sistema".

$$\vec{F}_{tot} = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} + \ldots + \frac{\Delta \vec{p}_n}{\Delta t}$$

Si la fuerza total, o lo que es lo mimo la fuerza total externa, es igual a cero entonces no hay cambio de la cantidad de movimiento, es decir $\Delta \vec{P}_{tot} = 0$. Esto última implica que no varía la cantidad de movimiento total y por lo tanto se conserva. Al decir que se conserva se quiere decir que la cantidad de movimiento total de un sistema antes debe ser igual a la cantidad de movimiento total después. Esto lo haremos más fácil con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.4

Un hombre de 75 kg está parado al lado de una piedra de 1.0 kg. Al inicio ambos están en reposo y se hallan sobre una superficie horizontal, plana y sin fricción. Cuando el hombre patea la piedra, ésta adquiere una velocidad de $25\ {}^{m}/_{s}$. ¿Cuál es la velocidad que adquiere el hombre?

Solución

El hombre ejerce una fuerza sobre la piedra y la piedra ejerce una fuerza igual y de dirección opuesta sobre el hombre. Por lo tanto, la fuerza neta sobre el sistema formado por hombre + piedra es igual a cero. En estas condiciones la cantidad de movimiento del sistema se conserva. Así, la cantidad de movimiento del sistema hombre-piedra es cero antes de que el hombre patee la piedra ya que ambos se encuentran en reposo. Después de patear la piedra la cantidad de movimiento del sistema hombre-piedra debe ser igual a cero.

$$P_{antes} = P_{después}$$

$$0 = p_{hombre} + p_{piedra}$$

$$0 = m_h v_h + m_p v_p$$

donde h es por hombre y p por piedra. Despejando v_h se obtiene:

$$v_h = -\frac{m_p v_p}{m_h} = -\frac{1.0kg \times 25 m/s}{75kg}$$

$$v_h = -0.33 m/s$$

El signo menos indica que el hombre se mueve en dirección opuesta a la de la piedra.

Ejemplo 7.5

Un hombre de 75 kg está parado en el extremo derecho de una canoa, en reposo, que mide 20 metros de largo y tiene una masa de 25 kg. Cuando el hombre lanza una piedra de 1.0 kg de masa con dirección horizontal y velocidad de 10 m/s, ¿cuál es la velocidad con que la canoa retrocede? Suponga que no hay fricción entre la canoa y el agua.

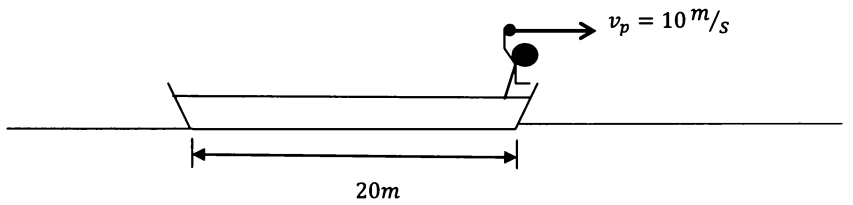


Figura 7.6

Solución

Cuando el hombre lanza la piedra, ésta experimenta una fuerza hacia adelante, de la misma forma la mano del hombre experimenta una fuerza de igual magnitud y dirección opuesta. Se puede considerar al hombre y la canoa como un solo objeto. Así, cada uno ejerce una fuerza de igual magnitud y dirección opuesta sobre el otro. Pero, considerando cano-hombre y piedra como un solo sistema, la fuerza externa es cero. La fuerza que ejerce el hombre sobre la piedra se cancela con la fuerza que la piedra ejerce sobre el hombre. Estas son fuerzas internas cuando nuestro sistema es hombre-canoa y piedra.

Cuando las fuerzas externas suman cero, se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema.

Cantidad de movimiento de (hombre + canoa) antes + cantidad de movimiento de la (piedra) antes = cantidad de movimiento de (hombre + canoa)después +cantidad de movimiento de la (piedra) después.

Antes de lanzar la piedra todo está en reposo y por lo tanto la cantidad de movimiento antes es igual a cero.

$$P_{antes} = P_{después} \qquad \text{donde} \quad P_{antes} = 0$$

$0 = m_{hc}v_{hc} + m_p v_p$ despejando v_{hc} (el subíndice *hc* significa sistema hombre-canoa).

$$v_{hc} = -\frac{m_p}{m_{hc}} v_p$$

y remplazando los datos dados en el problema:

$$v_{hc} = -\frac{1.0kg}{(75+25)kg} \times 10 {}^{m}\!/_{s}$$

$$v_{hc} = -0.10 {}^{m}\!/_{s}$$

El signo negativo indica que la canoa se mueve en dirección opuesta a la de la piedra. El hombre y canoa retroceden con una rapidez de $0.10 {}^{m}\!/_{s}$.

ACTIVIDAD 7.1

Explique lo que sucede cuando usted dispara un rifle. Considere que la masa de la bala es m, la velocidad con que se dispara v_b , la masa del rifle M. ¿Se debería tener cuidado al disparar un arma? Explique con relación a la conservación de la cantidad de movimiento lineal e impulso..

7.4 CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO DURANTE UN CHOQUE

Cuando un objeto *A* choca contra otro objeto *B*, el primero ejerce una fuerza sobre el segundo y éste ejerce una fuerza sobre el primero. Esta fuerza es de igual magnitud y dirección opuesta.

En la figura 7.7 se observa dos esferas en el instante en que las dos están en contacto. La esfera *A* ejerce una fuerza F_{AB} sobre la esfera *B*, y la esfera *B* ejerce una fuerza F_{BA} sobre la esfera *A*. Estas dos fuerzas son iguales en magnitud. En el gráfico de la figura 7.7 se muestra que sus direcciones son opuestas.

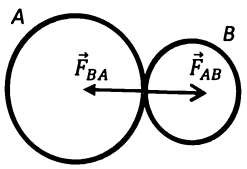


Figura 7.7

Considerando al objeto *A* y al objeto *B* como un sistema, las fuerzas $\vec{F}_{AB}$ y $\vec{F}_{BA}$ se cancelan mutuamente; por lo tanto, no hay fuerzas externas y por ende se conserva la cantidad de movimiento del "sistema".

Si analizamos a cada esfera por separado, como se muestra en la figura 7.8, se observará que sobre la esfera *A* actúa una fuerza neta $\vec{F}_{BA}$ (hacia la izquierda) y sobre la esfera *B* actúa una fuerza neta $\vec{F}_{AB}$ (hacia la derecha). Al actuar fuerzas netas sobre cada una de las esferas, entonces ellas cambian su cantidad de movimiento y por ende sus velocidades.

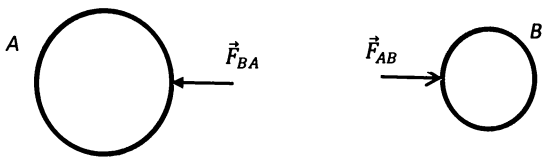


Figura 7.8

Las fuerzas netas que actúan sobre cada esfera hacen variar la cantidad de movimiento lineal de cada una de ellas.

Se debe recordar que el Impulso $F\Delta t = \Delta p$.

Para el objeto A: $F_{BA}\Delta t = p_{fA} - p_{iA}$ *(6.10)*

donde p_{fA} es la cantidad de movimiento final del objeto A y p_{iA} es la cantidad de movimiento inicial del objeto A.

Para el objeto B: $F_{AB}\Delta t = p_{fB} - p_{iB}$ *(6.11)*

Similarmente, p_{fB} es la cantidad de movimiento final del objeto B, y p_{iB} es la cantidad de movimiento inicial del objeto B.

Como $\vec{F}_{AB}\Delta t = -\vec{F}_{BA}\Delta t$:

$$(p_{fA} - p_{iA}) = -(p_{fB} - p_{iB})$$

y reordenando términos,

$$p_{iA} + p_{iB} = p_{fA} + p_{fB} \qquad (7.10)$$

Esta última ecuación implica que la cantidad de movimiento total del *sistema antes* es igual a la cantidad total de movimiento después, en ausencia de fuerzas externas actuando sobre el sistema.

Ejemplo 7.6

Un objeto A de masa m_A = 2.0 kg y velocidad v_A =5.0 m/s se mueve hacia la derecha e impacta a otro objeto B de masa m_B = 1.0 kg el cual se halla en reposo. El objeto A se incrusta en el objeto B y después del choque se mueven juntos con la misma velocidad v_f. Calcule v_f.

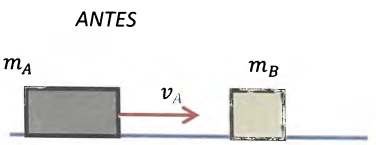


Figura 7.9

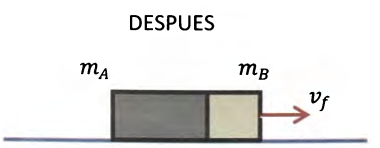


Figura 7.10

Solución

Cuando dos objetos chocan y luego se mueven juntos se denomina "choque inelástico" pero al ser un choque se conserva la cantidad de movimiento lineal. Por lo tanto:

$$P_{antes} = P_{después}$$

Antes del impacto el objeto A tiene cantidad de movimiento $m_A v_A$ y el objeto B no tiene cantidad de movimiento ya que se encuentra en reposo y por tanto su velocidad es cero.

$$P_{antes} = m_A v_A$$

Después del impacto, los dos objetos se mueven juntos con una velocidad común v_f. Por lo tanto su cantidad de movimiento será:

$$P_{después} = (m_A + m_B) v_f$$

Igualando las dos últimas ecuaciones en virtud de que $P_{antes} = P_{después}$:

$$m_A v_A = (m_A + m_B) v_f$$

Despejando v_f:

$$v_f = \frac{m_A}{(m_A + m_B)} v_A$$

Remplazando valores dados en el problema se tiene,

$$v_f = \frac{2.0kg}{(2.0+1.0)kg} \times 5.0 \, m/s$$

$$v_f = 3.3 \, m/s$$

Ejemplo 7.7

La figura muestra dos niñas patinadoras. Inicialmente se hallan en reposo como se muestra en la figura 7.11 y luego se van a empujar mutuamente. Si Melissa tiene una masa de 40 kg y al ser empujada adquiere una velocidad de 3.0 m/s, ¿cuál es la velocidad que adquiere Fernanda, cuya masa es de 50 kg? (ver figura 7.12)

Figura 7.11

Figura 7.12

Al inicio, las dos niñas están en reposo y por lo tanto su cantidad de movimiento es igual a cero. Cuando se empujan, ellas se mueven en direcciones opuestas, y por lo tanto la cantidad de movimiento total debe ser también igual a cero ya que las fuerzas que intervienen *son internas*. Al no existir fuerzas externas al sistema, la cantidad de movimiento se conserva, por lo tanto:

$$P_{antes} = P_{después}$$

$$0 = m_{mel}v_{mel} + m_{fer}v_{fer}$$

donde m_{mel} es la masa de Melissa, v_{mel} la velocidad de Melissa. m_{fer} la masa de Fernanda y v_{fer} la velocidad de Fernanda.

Despejando v_{fer} se tiene:

$$v_{fer} = -\frac{m_{mel}}{m_{fer}}v_{mel}$$

Remplazando datos dados en el problema:

$$v_{fer} = -\frac{40kg}{50kg} \times 3.0 \, m/s$$

$$v_{fer} = -2.4 \, m/s$$

El signo negativo muestra que las dos niñas se mueven en direcciones opuestas.

ACTIVIDAD 7.2

Para la figura 7.12 , suponga que mientras Melissa se mueve hacia atrás con una rapidez de 3.0 m/s, ¿después de cuántos metros se detendrá si existe un coeficiente de rozamiento entre sus patines y el suelo de 0.01?

ACTIVIDAD 7.3

Como en el ejemplo 7.7 la masa de Fernanda es mayor que la masa de Melissa, entonces será verdad que:

a) La magnitud de la fuerza que experimenta Melissa es mayor que la que experimenta Fernanda.
b) La magnitud de la fuerza que experimenta Melissa es menor que la que experimenta Fernanda.
c) La magnitud de la fuerza que experimenta Melissa es igual a la que experimenta Fernanda.
d) No se puede saber porque falta el tiempo en que las dos niñas están en contacto.

7.5 CHOQUES EN UNA DIMENSIÓN

En la sección anterior se realizó un análisis de un choque y a la conclusión que se llegó es de que la cantidad de movimiento del sistema permanece constante. Sin embargo no se abordó el tema energético. De esta manera se puede clasificar a los choques dependiendo si conservan o no su energía cinética.

a) Si la energía cinética antes de un choque es igual a la energía cinética después del choque, se dice que el choque es "elástico"
b) Si la energía cinética antes de un choque es mayor que la energía cinética después del choque, se dice que el choque es "inelástico.
c) Si los objetos después del choque permanecen juntos se dice que el choque es completamente "inelástico"

Cuando dos objetos macroscópicos chocan se pierde cierta cantidad de energía cinética. Suponga que dos trenes chocan frontalmente y luego se adhieren entre si. La energía que se pierde se debe al trabajo que se ejecuta debido a la deformación permanente de la carrocería de los vagones. Otra fuente de pérdida de energía se debe al calor que se genera durante la colisión. En esta sección, se estudiará los choques en los que no hay pérdida de energía cinética y aquellos en que si hay pérdida de energía cinética.

Ejemplo 7.8

En la figura se muestra una esfera de masa $m_A = 2.0kg$ con velocidad de $v_A = 5.0\,{}^{m}/_{s}$ que se mueve hacia la derecha e impacta elásticamente una esfera de masa $m_B = 1.0kg$ que se encuentra inicialmente en reposo. Calcule la velocidad de las dos esferas inmediatamente después del choque.

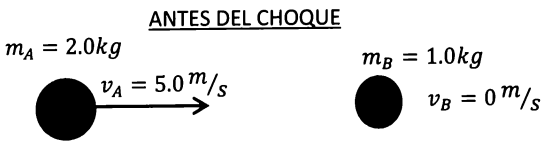


Figura 7.13

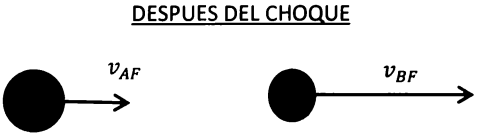


Figura 7.14

De acuerdo a la conservación de la cantidad de movimiento tenemos:

$$m_A v_A + 0 = m_A v_{AF} + m_B v_{BF} \qquad m_A(v_A - v_{AF}) = m_B v_{BF} \tag{7.11}$$

De acuerdo a la conservación de la energía cinética:

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + 0 = \frac{1}{2}m_A v_{AF}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{BF}^2 \qquad m_A\left(v_A^2 - v_{AF}^2\right) = m_B v_{BF}^2 \tag{7.12}$$

Dividiendo la ecuación (7.12) para la ecuación (7.11):

$$\frac{\left(v_A^2 - v_{AF}^2\right)}{(v_A - v_{AF})} = \frac{v_{BF}^2}{v_{BF}} \qquad (v_A + v_{AF}) = v_{BF} \tag{7.13}$$

Remplazando (7.13) en (7.11)

$$m_A v_A - m_A v_{AF} = m_B v_A + m_B v_{AF}$$

$$v_{AF}(m_B + m_A) = (m_A - m_B)v_A$$

Despejando v_{AF} se tiene:

$$v_{AF} = \left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right)v_A$$

Similarmente, $$v_{BF} = \left(\frac{2m_A}{m_A + m_B}\right)v_A$$

donde, v_A es la velocidad inicial de la primera partícula antes del choque

v_B es la velocidad de la segunda partícula antes del choque

v_{AF} es la velocidad de la primera partícula después del choque

v_{BF} es la velocidad de la segunda partícula después del choque.

En el caso del problema planteado y remplazando los datos se obtiene:

$$v_{AF} = \left(\frac{2.0-1.0}{2.0+1.0}\right)\times 5.0\,m/s \qquad v_{AF} = 1.7\,m/s$$

$$v_{BF} = \left(\frac{2\times 2.0}{2.0+1.0}\right)\times 5.0\,m/s \qquad v_{BF} = 6.7\,m/s$$

Ejemplo 7.9

En la figura se representa lo que se denomina el "péndulo balístico". Mediante este arreglo se puede determinar la velocidad de un proyectil. El péndulo consiste en un bloque de madera que está sujeto de cuerdas. Luego cuando se dispara una bala sobre el bloque de madera, la bala se incrusta en él y el sistema formado por bloque-bala se mueve y sube una distancia h como se muestra en la figura 7.13. Si la masa de la bala es de $50.0g$, *la masa del bloque de* $10.0kg$. *y* $h = 5.0cm$, calcule la velocidad del proyectil antes del impacto. v_b *es la velocidad de la bala antes del choque.*

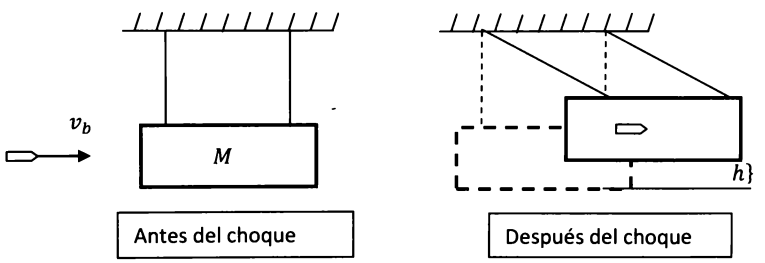


Figura 7.15

Solución

Este es un ejemplo de un choque completamente inelástico. En el gráfico de la figura 7.15 (a) se representa lo que ocurre antes del choque. Se observa que sólo la bala tiene cantidad

de movimiento la cual es igual a mv_b. Después del choque, la bala se incrusta en el bloque y se mueve hasta alcanzar una altura *h como*. La velocidad del bloque + bala inmediatamente después del choque es la responsable de que el sistema (bloque + bala) alcance la altura *h,* como se observa en la figura 7.15 (b).

$$mv_b = (m+M)v \qquad (7.14)$$

donde v es la velocidad del sistema bloque + bala inmediatamente después del choque.

La energía cinética del sistema bloque + bala inmediatamente después del choque

$\frac{1}{2}(m+M)v^2$ se convierte en energía potencial gravitacional $(m+M)gh$.

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = (m+M)gh \qquad (7.15)$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Remplazando esta cantidad en la ecuación (7.14):

$$mv_b = (m+M)\sqrt{2gh}$$

Despejando la velocidad de la bala v_b:

$$v_b = \frac{(m+M)}{m}\sqrt{2gh} \qquad (7.16)$$

Remplazando valores:

$$v_b = \left(\frac{0.050 + 10.0}{0.050}\right) \times \sqrt{2 \times 10\,{}^{m}/_{s^2} \times 0.05m}$$

$$v_b = 201\,{}^{m}/_{s}$$

ACTIVIDAD 7.4

Con respecto al ejemplo 7.9, en el que se dispara una bala la misma que se incrusta en un bloque de madera, indique la alternativa correcta.

a) La energía cinética se conserva.
b) La energía cinética no se conserva.
c) Este es un ejemplo de choque en dos dimensiones.
d) Este es un ejemplo de choque en una y dos dimensiones.
e) La cantidad de movimiento del sistema bala-bloque no se conserva por tratarse de un choque inelástico.

ACTIVIDAD 7.5

Cuando en un choque, en el que no se conserva la energía cinética, ¿significa esto que se está violando la ley de la conservación de la energía? Explique.

ACTIVIDAD 7.6

Cuando se deja caer una pelota de caucho sobre la superficie terrestre, ¿cuál es la velocidad de la Tierra después del choque? Explique.

7.6 CHOQUE EN DOS DIMENSIONES

Hasta ahora hemos estudiado los choques en una sola dimensión en la que no es necesario usar la nomenclatura vectorial puesto que habían sólo dos direcciones posibles, positiva o negativa. En el choque en dos dimensiones, la cantidad de movimiento se conserva pero al ser una cantidad vectorial se debe formar dos ecuaciones, la primera realizar la conservación de la cantidad de movimiento en la dirección x y la segunda realizar la conservación de la cantidad de movimiento en la dirección y.

El siguiente es un problema de un choque en dos dimensiones.

Ejemplo 7.10

Una esfera de masa $m_A = 2.0kg$ se mueve en la dirección x con una velocidad de $5.0\,^{m}/_{s}$ y choca con otra esfera de masa $m_B = 1.0kg$ que se mueve en la dirección y con una velocidad de $10.0\,^{m}/_{s}$. Si el choque es completamente inelástico, calcule la magnitud y la dirección de la velocidad inmediatamente después del choque. $sen45^0 = 0.7$

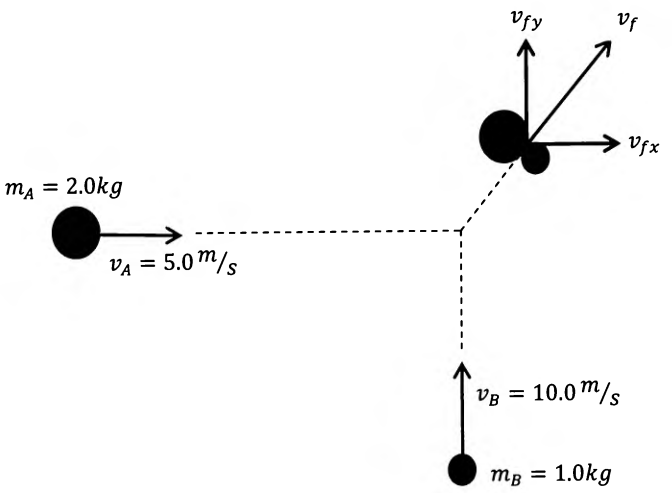


Figura 7.16

Conservación de la cantidad de movimiento en la dirección x.

$$m_A v_A = (m_A + m_B) v_{fx} \qquad m_A v_A = (m_A + m_B) v_f \cos\theta \tag{7.17}$$

Por conservación de la cantidad de movimiento en la dirección y.

$$m_B v_B = (m_A + m_B) v_{fy} \qquad m_B v_B = (m_A + m_B) v_f sen\theta \tag{7.18}$$

Dividiendo la ecuación (7.18) para la ecuación (7.17) queda:

$$\tan\theta = \frac{m_B v_B}{m_A v_A}$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{1.0\times10.0}{2.0\times5.0}\right) \text{ resolviendo,} \qquad \theta = 45^0$$

Despejando v_f de la ecuación (7.18) y remplazando el ángulo θ:

$$v_f = \frac{m_B v_B}{(m_A + m_B) sen\theta} \qquad v_f = \frac{1.0\times10.0\,^m/_s}{(2.0+1.0) sen45^0}$$

$$v_f = 4.7\,^m/_s$$

ACTIVIDAD 7.7

¿Es posible que exista un choque inelástico de manera que los cuerpos que chocan permanezcan en reposo después de la colisión? Explique.

ACTIVIDAD 7.8

Desde una altura h se deja caer un objeto de masa m el cual cae sobre la plataforma de un camión que se está moviendo con velocidad constante y en dirección horizontal. Indique ¿qué sucede con la velocidad del camión si el objeto, al caer, se adhiere a la plataforma?

a) Disminuye
b) Aumenta
c) Se mantiene constante
d) Se frena bruscamente
e) Primero disminuye y luego aumenta paulatinamente.

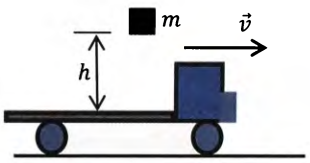


Figura 7.17

ACTIVIDAD 7.9

Cuando un objeto de masa m choca elásticamente con otro objeto de masa M que inicialmente se encontraba en reposo, y si $m \ll M$, entonces el objeto de masa m rebotará y se moverá en dirección opuesta a la que llevaba.

Verdadero ☐ Falso ☐ depende del tipo de material ☐

7.7 CENTRO DE MASA

Cuando se tiene un objeto que tiene dimensiones, existe un punto en el que se considera que toda la masa del objeto se encuentra concentrada; ese punto se llama *centro de masa*. Se puede hablar de centro de masa de un sistema de partículas así como del centro de masa de un objeto continuo. Cuando actúan fuerzas sobre cada una de las partículas que forman el sistema, es equivalente a que la fuerza resultante sobre ese sistema actúe sobre el centro

de masa del sistema de partículas; así, el movimiento del centro de masa será afectado sólo por la sumatoria de todas las fuerzas externas.

$$\sum \vec{F} = M\vec{a}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum \vec{F}}{M} \qquad (7.19)$$

donde, M es la masa del sistema de partículas y $\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{internas} + \sum \vec{F}_{externaas}$

Considerando a todas las partículas como un sistema, la sumatoria de las fuerzas internas se cancelan mutuamente y solamente la sumatoria de las fuerzas externas afecta el movimiento del centro de masa. En la ecuación *(7.19)* $\vec{a}_{CM}$ es la aceleración del centro de masa, por lo tanto se puede decir que:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum \vec{F}_{externas}}{M} \qquad (7.20)$$

En conclusión, en todo objeto continuo o en un sistema de partículas existe un punto denominado *el centro de masa* que es aquel donde se considera que está concentrada toda la masa y que la sumatoria de todas las fuerzas *externas* actúa sobre ese punto.

Se va a calcular la ubicación del centro de masa de un sistema de dos partículas m_1 y m_2 unidas por una varilla de masa despreciable colocadas sobre el eje de las x, como se muestra en la figura *7.16.*

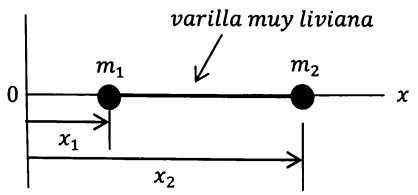


Figura 7.16

El centro de masa de las dos partículas mostradas en la figura *7.16* es igual a:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (7.21)$$

Ejemplo 7.11

Para el sistema de dos partículas de la figura *7.16* calcular el centro de masa suponiendo que $m_1 = m_2 = m$.

Solucion

Aplicando la ecuación *(7.21)* se puede calcular el centro de masa:

$$x_{CM} = \frac{mx_1 + mx_2}{2m}$$

$$x_{CM} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Esta última expresión indica que el centro de masa de dos objetos de igual masa queda en el punto medio que une las dos masas.

Si una de las masas es mayor que la otra, el centro de masa estará más cerca del cuerpo más masivo.

Ejemplo 7.12

Calcule el centro de masa de tres masas puntuales que se hallan sobre el eje de las x. La masa $m_1 = 1.0kg$ se halla en $x_1 = 0.5m$; la masa $m_2 = 2.0kg$ en $x_2 = 1.0m$; y la masa $m_3 = 1.5kg$ en $x_3 = 2.0m$.

Solución:

El centro de masa de las tres partículas debe estar sobre el eje de las x y la ecuación correspondiente es:

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

y reemplazando los datos dados en el problema:

$$x_{CM} = \frac{1.0\times0.5 + 2.0\times1.0 + 1.5\times2.0}{1.0 + 2.0 + 1.5}m \quad \text{resolviendo:} \qquad x_{CM} = 1.2m$$

Para n masas colocadas sobre el eje de las x el centro de masa está dado por:

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \qquad (7.22)$$

O en forma general se puede expresar como una sumatoria.

21. Una partícula de masa $m_1 = 200\ gramos$ está colocada en la posición $(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})cm$; otra partícula de masa $m_2 = 400\ gramos$ está en la posición $(4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})cm$. ¿Cuál debe ser la posición (x, y) de una partícula de 600 gramos de masa para que la posición del centro de masa del sistema esté en: $\vec{r}_{CM} = (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})cm$?
22. Un objeto A que se mueve con velocidad constante hacia la derecha, choca contra otro objeto B que está inicialmente en reposo. Si el choque es parcialmente elástico, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
    a) Se conserva la energía cinética.
    b) No se conserva la cantidad de movimiento.
    c) Se conserva la cantidad de movimiento y la energía cinética.
    d) No se conserva la cantidad de movimiento pero si la energía cinética.
    e) No se conserva la energía cinética.
23. Una masa $m_1 = 300g$ se halla en el punto (1, 2)cm. Otra masa $m_2 = 500g$ en la posición (4, 1)cm, y una tercera masa m_3 en la posición (3, 4)cm. Calcule el vector posición $\vec{r}$ del centro de masa del sistema de las tres partículas en función de los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$.

Ejemplo 7.14

Sobre el plano xy están distribuidas tres masas de $m_1 = 2.0kg$, $m_2 = 3.0kg$, $m_3 = 5.0kg$ en las posiciones mostradas en la figura 7.17. Calcule x_{CM} y y_{CM}.

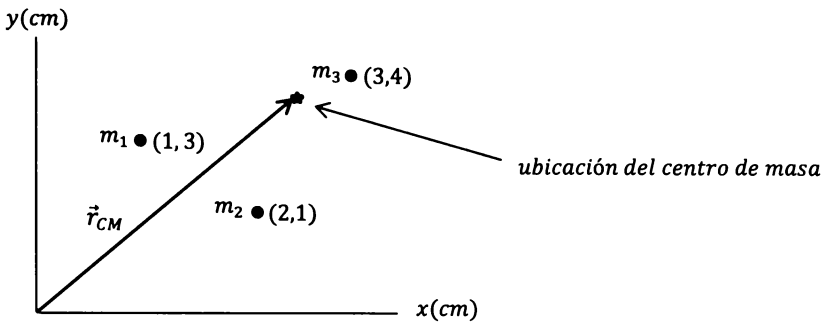


Figura 7.17

Solución:

El centro de masa de este sistema debe ser un par ordenado formado por x_{CM} y y_{CM}. Para hallar x_{CM} se supone que todas las masas están sobre el eje de las x.

$$x_{CM} = \frac{(2.0kg \times 1.0cm) + (3.0kg \times 2.0cm) + (5.0kg \times 3.0cm)}{(2.0 + 3.0 + 5.0)kg} = 2.3cm$$

Para hallar y_{CM} se supone que todas las masas están sobre el eje de las y.

$$y_{CM} = \frac{(2.0kg \times 3.0cm) + (3.0kg \times 1.0cm) + (5.0kg \times 4.0cm)}{(2.0 + 3.0 + 5.0)kg} = 2.9cm$$

El centro de masa también se puede expresar en forma vectorial por medio del vector de posición $\vec{r}$, donde este vector está dado por:

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} \qquad (7.26)$$

Para el caso del ejemplo *(7.14)*, el vector posición $\vec{r}_{CM}$ está dado por:

$$\vec{r}_{CM} = \left(2{,}3\hat{i} + 2{,}9\hat{j}\right)cm$$

Ejemplo 7.15

Una pelota de 1.0 kg de masa, que se mueve con una velocidad de 10.0 m/s golpea una pared vertical formando un ángulo de 60^0 con respecto a una línea perpendicular a la pared. La pelota rebota con la misma rapidez que impactó a la pared y con un ángulo de 60^0 con respecto a una perpendicular a la pared como se muestra en la figura *(7.18).*

a) Calcule el cambio de la cantidad de movimiento de la pelota.
b) Si el tiempo de contacto entre la pelota y la pared es de 0.02 s, calcule la magnitud de la fuerza promedio que la pared ejerce sobre la pelota.

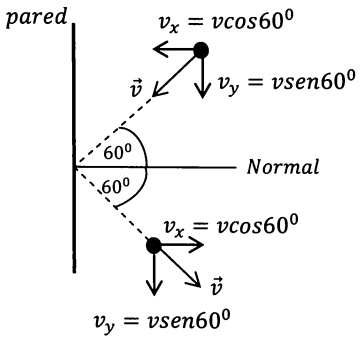


Figura 7.18

Solución:

Una vez que se han hallado las componentes de las velocidades de impacto y de rebote de la pelota sobre la pared, se observa que la componente de la velocidad en la dirección y no cambia. Si no hay variación de la cantidad de movimiento en la dirección y, implica que en esa dirección no hay fuerza sobre la pelota. En el caso de la componente de la velocidad en la dirección horizontal, si hay cambio en la velocidad pues hay una variación de la dirección de la componente $v_{x,}$. Por lo tanto, existe una fuerza en la dirección horizontal. Entonces la pelota ejerce una fuerza sobre la pared y la pared ejercerá una fuerza de igual magnitud y dirección opuesta sobre la pelota. Estas fuerzas son horizontales.

(a) $$\Delta p = \Delta p_x = mv_x - m(-v_x)$$

$$\Delta p = 2mv_x = 2mv\cos 60^0 = 2(1.0kg)(10.0m/s)\cos 60^0$$

$$\Delta p = 10.0\frac{kg \cdot m}{s}$$

DINÁMICA ROTACIONAL

CAPÍTULO 8

INTRODUCCIÓN

Hasta este momento hemos estudiado el movimiento de una partícula en traslación pura, el movimiento circular uniforme y variado, pero independientemente en este capítulo estudiaremos el movimiento de traslación de cuerpo rígido, analizando el movimiento de traslación de un punto del cuerpo llamado centro de masa y la rotación del cuerpo alrededor de un eje de rotación, es decir, se estudiará el movimiento de un cuerpo rígido en rotación pura o también el movimiento del cuerpo en traslación y rotación.

8.1 CUERPO RÍGIDO

Un cuerpo rígido es aquel que permanece sin deformación bajo la aplicación de fuerzas o torques externos sobre el mismo, es decir, mantiene sus dimensiones y su geometría invariables.

El cuerpo rígido es una idealización para estudiar y resolver problemas de mecánica de una forma sencilla, pero en la realidad todos los cuerpos sufren variaciones en sus dimensiones cuando son sometidos a fuerzas externas, dichas variaciones serán estudiadas en el capítulo de elasticidad.

8.2 CENTRO DE MASA

El centro de masa, como se había estudiado en el capítulo 7, es el punto donde se considera concentrada toda la materia (masa) del cuerpo o sistema de partículas. Es decir, si se aplica una fuerza resultante $\vec{F}$ sobre el centro de masa, este cuerpo o el sistema de partículas adquieren la misma aceleración, que si la fuerza se aplicará sobre ellos.

Si el cuerpo se mueve en traslación y rotación el centro de masa se mueve como si fuera una partícula. El centro de masa puede estar dentro o fuera del cuerpo.

Las coordenadas del centro de masa están dadas por las siguientes expresiones:

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots m_n} \tag{8.1}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots m_ny_n}{m_1 + m_2 + \cdots m_n} \tag{8.2}$$

Donde x, y son las coordenadas del centro de masa de cada partícula, con respecto a un sistema de referencia y m la masa de cada partícula.

La ubicación del centro de masa para placas planas, de igual espesor y material homogéneo está dada por las siguientes expresiones:

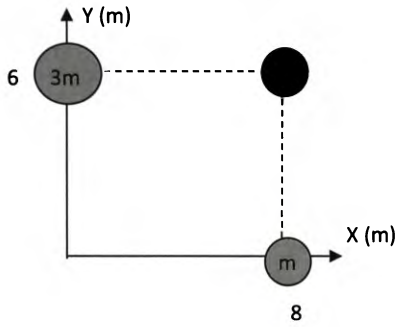
$$x_{cm} = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} \tag{8.3}$$

$$y_{cm} = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 + \cdots + y_nA_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} \tag{8.4}$$

Donde x, y son las coordenadas del centro de masa con respecto a un sistema de referencia y A es el área de cada placa.

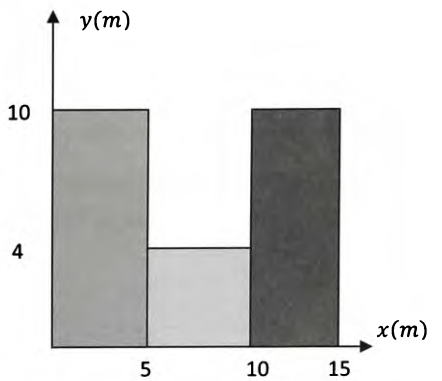
ACTIVIDAD 8.1

De acuerdo a la siguiente distribución de masas puntuales. Determinar las coordenadas del centro de masa.



ACTIVIDAD 8.2

De acuerdo a la figura mostrada, formada por un conjunto de placas homogéneas y de espesor constante. Determinar el centro de masa del sistema.



8.3 EJE DE ROTACIÓN

Es una línea recta imaginaria perpendicular al plano de rotación alrededor de la cual todos los puntos describen trayectorias circulares. El eje de rotación se puede colocar en cualquier parte del cuerpo inclusive en el centro de masa. Ver figura 8.1

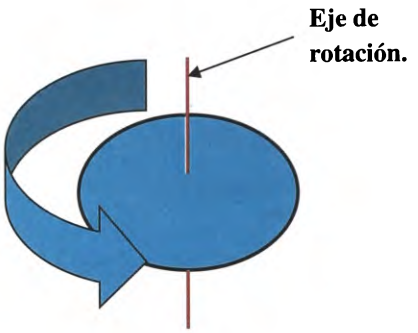


Figura 8.1

8.4 DINÁMICA ROTACIONAL

Si una fuerza $\vec{F}$ se aplica sobre un objeto en un punto que está a una distancia r del eje de rotación, se dice que esta fuerza produce una tendencia de rotación del cuerpo alrededor de dicho eje. Esa tendencia de rotación se conoce como torque.

El torque es una cantidad vectorial y se define como el producto vectorial entre el vector posición $\vec{r}$ y la fuerza aplicada $\vec{F}$.

Figura 8.2

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{8.5}$$

La magnitud del torque es $\tau = rF\,sin\,\theta$ (8.6)

Donde $\vec{\tau}$ es el torque, y θ es el ángulo comprendido entre el vector posición $\vec{r}$ y la fuerza $\vec{F}$, como puede apreciarse en la figura 8.2.

De acuerdo a la ecuación 8.6, se puede observar que el torque **será máximo** cuando el ángulo es $\theta = 90^0$, es decir cuando la fuerza y el vector posición son perpendiculares.

El torque **será mínimo, valor cero**, cuando el ángulo sea $\theta = 0^0$ o $\theta = 180^0$, es decir, cuando la fuerza sea paralela al vector posición.

Otras maneras de maximizar el torque son:

- Aumentado la fuerza aplicada.
- Aumentando la magnitud del vector posición.
- Orientando la fuerza para que sea perpendicular al vector posición.

Otras maneras de minimizar el torque son:

- Disminuyendo la fuerza.
- Disminuyendo la magnitud del vector posición.
- Aplicando la fuerza paralela al vector posición.

Ejemplo 8.1

Un torque $\vec{\tau}$ se produce cuando se aplica una fuerza $\vec{F}$ que forma una ángulo θ con un vector posición $\vec{r}$, como se indica en la figura 8.2. ¿Cuántas veces aumenta el torque si se duplica la magnitud del vector posición y la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ aumenta 5 veces, manteniendo el ángulo entre ellos?

Solución:

La magnitud del torque está dado por $\tau = rF\,sin\,\theta$, pero como la magnitud del vector posición se duplica y la fuerza se hace 5F, entonces el torque será $\tau_2 = (2r)(5F)\,sin\,\theta = 10rF\,sin\,\theta = 10\tau$

Ejemplo 8.2

Se intenta aflojar un perno aplicando una fuerza de 50 N sobre un punto que se encuentra a 30 cm del perno. En este caso, la magnitud del vector posición es de 30 cm formando un ángulo $\theta = 30^0$ con la fuerza, como se indica en la figura 8.2. Determinar la magnitud del torque debido a la aplicación de la fuerza.

Solución:

Este problema se puede resolver por tres métodos

Primer método:

Este método consiste en usar la ecuación 8.6 $\tau = rF\,sin\,\theta$

$\tau = rF\,sin\,\theta = (0.30m)\,(50\,N)sin30^0 = 7.5\,N.m$

Segundo método:

El segundo método consiste en descomponer la fuerza $\vec{F}$ en sus dos componentes rectangulares F_x y F_y, como se observa en la figura 8.3.

$$F_x = Fcos30^0 = 43.3\ N$$

$$F_y = Fsin30^0 = 25\ N$$

La fuerza F_x es paralela al vector posición, por lo tanto, no genera torque.

La fuerza F_y es perpendicular a $\vec{r}$, por lo tanto, genera el máximo torque.

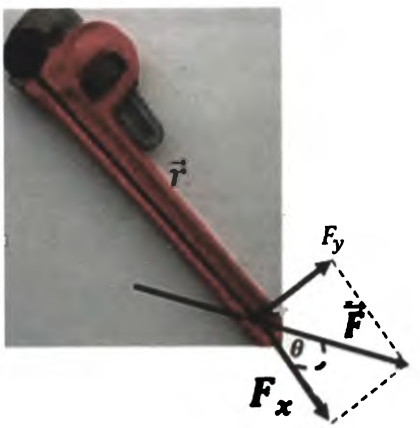


Figura 8.3

El torque generado por F_y es $\tau = rF_y$

$\tau = (0.30\text{m})(25\ \text{N}) = 7.5\ \text{N} \cdot \text{m}$ que corresponde al mismo valor que se obtuvo por la ecuación 8.6.

Tercer método:

Se intenta aflojar un perno como se indica en la figura 8.4, aplicando una fuerza de 50 N a un vector posición de 30 cm y con un ángulo $\theta = 30^0$. Determinar el torque de forma vectorial. $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

Ahora consideremos el ejercicio de la figura 8.4, el mismo que lo vamos a resolver vectorialmente. Para ello consideramos que el sistema de referencia se halla en el perno, como se muestra en la figura 8.4.

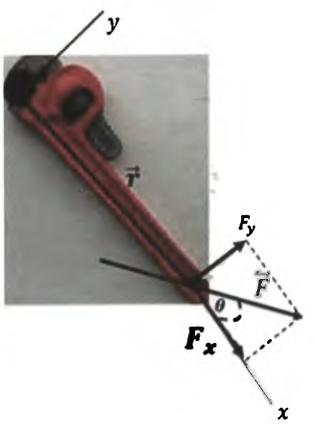


Figura 8.4

Definimos los vectores $\vec{r} = r_x\hat{\imath} + r_y\hat{\jmath} = 0.30\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath}$

$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} = Fcos30^0\hat{\imath} + Fsin30^0\hat{\jmath} = 43.3\,\hat{\imath} + 25\,\hat{\jmath}$$

A continuación se realizará el producto vectorial

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r_x & r_y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = [r_xF_y - r_yF_x]\hat{k} \qquad (8.7)$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0.30\,m & 0 & 0 \\ 43.3\,N & 25\,N & 0 \end{vmatrix} = [(0.30m)(25\,N) - (43.3\,N)(0)]\hat{k}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = [(0.30m)(25\,N) - (43.3\,N)(0)]\hat{k} = 7.5\,\hat{k}\ \ [\text{N.m}]$$

Como $\vec{r}$ y $\vec{F}$ son vectores que se encuentran en el plano xy y la operación es vectorial, el resultado que se obtiene es un vector en la dirección z.

ACTIVIDAD 8.3

Se intenta aflojar un perno aplicando una fuerza de 100 N de magnitud en un punto cuyo vector posición $\vec{r}$ es de magnitud 20 cm. La fuerza forma un ángulo $\theta = 30^0$ con la dirección de $\vec{r}$, como se muestra en la figura.

Determinar la magnitud del torque debido a la aplicación de la fuerza.

Ejemplo 8.3

Una persona aplica una fuerza con una llave como se indica en la figura 8.5. Si la magnitud del radio vector es 0.40 cm y la fuerza aplicada es $50\sqrt{2}$ N con un ángulo $\theta = 135^0$. Determinar la magnitud del torque aplicado.

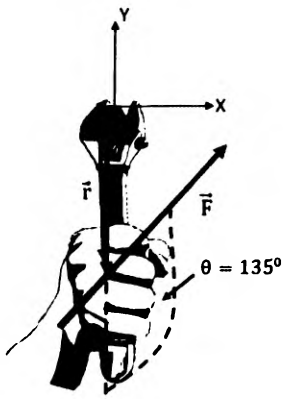


Figura 8.5

La magnitud del torque es:

Primer método:

$$\tau = rF\sin\theta = (0.40\text{m})\left(50\sqrt{2}\ \text{N}\right)\sin 135^0 = 20\ \text{N.m}$$

Segundo método:

Descomponemos la fuerza en sus componentes rectangulares.

$$F_x = 50\sqrt{2}\,cos45^0 = +50\,N$$

$$F_y = 50\sqrt{2}sin45^0 = +50\,N$$

La fuerza F_x no realiza torque alguno porque es paralela al radio.

La fuerza F_y realiza el máximo torque porque es perpendicular a $\vec{r}$.

$\tau = rF_y = (0.40\ \text{m})50\ \text{N} = 20\ \text{N.m}$

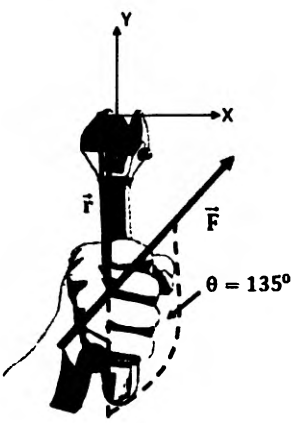
Tercer método:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \left[r_x F_y - r_y F_x\right]k = \left[(0)(50N) - (-0.40m)(50N)\right]k$$

$$\vec{\tau} = 20\ k\ [\text{N.m}]$$

ACTIVIDAD 8.4

Una persona aplica una fuerza con una llave como se indica en la figura 8.5. Si la magnitud del radio vector es 0.50 cm y la fuerza aplicada es 100 N con un ángulo $\theta = 135^0$. Determinar la magnitud del torque aplicado.



8.5 ANALOGÍA ENTRE LA PRIMERA LEY DE NEWTON PARA TRASLACION Y ROTACIÓN

Analogía usando la primera ley de Newton

Traslación	Rotación	
$\sum \vec{F} = 0$	$\sum \vec{\tau} = 0$	(8.8)

Usando la analogía entre el movimiento de traslación y el de rotación se puede observar que en la dinámica rotacional se usa la sumatoria de torques igual a cero para estudiar un cuerpo rígido en equilibrio rotacional. Con esto, nos aseguramos que el cuerpo no va a rotar.

Ejemplo 8.4

Una barra rígida de peso despreciable está en equilibrio pivoteada en el punto O, como se muestra en la figura 8.6. Si en los extremos de la barra se colocan pesos de 200 N y 600 N, determine la longitud de la barra. Ver figura 8.6

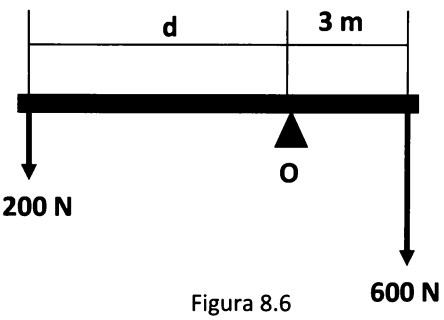


Figura 8.6

Solución:

Se realiza la sumatoria de torques alrededor del punto O y eso se iguala a cero. Matemáticamente se escribe:

$\sum \tau_O = 0$ con un sentido asumido como positivo en sentido anti horario.

Las fuerzas que tratan de hacer girar la barra en sentido anti-horario se consideran que producen torques positivos, mientras que las fuerzas que tratan de hacer mover la barra en sentido horario producen torques negativos. Estas consideraciones acerca de los sentidos horario y anti-horarios son solamente convenciones que se hacen en este texto.

$$\sum \tau_O = (-600\ \text{N})(3\text{m}) + (200\ \text{N})(\text{d}) = 0$$

De esta ecuación se despeja la distancia d.

$$d = \frac{600N(3m)}{200N} = 9m$$

así, la longitud de la barra es: $L = 3m + d = 12m$

Ejemplo 8.5

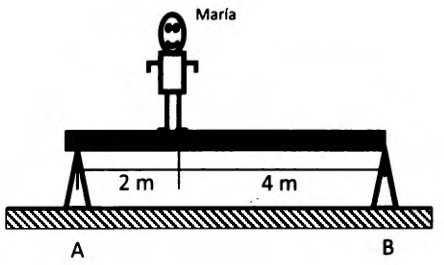
Resolver el ejemplo 8.4, sabiendo que la barra está en equilibrio como se indica en la figura 8.4. Si se aplica una fuerza F=100 N, verticalmente hacia abajo en el punto O. Se desea saber si esto afectará el equilibrio.

Solución:

Si se aplica una fuerza adicional en el punto O, no afectará el equilibrio en lo absoluto porque no genera un torque con respecto al punto O.

ACTIVIDAD 8.5

María pesa 600 N y está parada sobre una tabla de 60 N de peso que tiene una longitud de 6m, la cual está apoya en sus dos extremos, como se indica en la figura. Calcule las fuerzas de reacción en los apoyos A y B :



8.6 MOMENTO DE INERCIA (I)

El momento de inercia es una propiedad que presentan todos los cuerpos a resistirse a la tendencia de rotación de los mismos, es una cantidad escalar que depende de la geometría del cuerpo y como está distribuida su masa con respecto al eje de rotación. El momento de inercia no sólo depende de la masa sino también de qué tan alejada o que tan cerca está de su eje de rotación.

8.6.1 Momento de Inercia de masas puntuales

El momento de inercia de una masa puntual m, que rota alrededor de un eje que pasa por su centro y es perpendicular al plano de rotación a una distancia r está dado por la siguiente expresión. $I = mr^2$. Ver figura 8.7

El momento de inercia de la masa puntual es:

$$I = mr^2 \tag{8.9}$$

Si la masa m se aleja $3r$ del eje, el momento de inercia tendrá el siguiente valor.

$$I = m(3r)^2 = 9\,mr^2 = 9I.$$

Es decir, el momento de inercia es 9 veces su valor inicial.

Si una masa puntual m está más alejada del eje de rotación tendrá mayor momento de inercia.

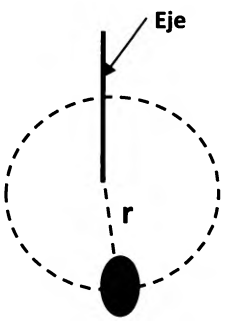


Figura 8.7

8.6.2 Momento de Inercia de cuerpos simétricos

Algunos cuerpos simétricos son: un disco, un cilindro, un anillo, una esfera, una barra, etc.

El momento de inercia para un disco o cilindro sólido de masa M y radio R, está dado por la siguiente expresión, como se muestra en la figura 8.8.

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \tag{8.10}$$

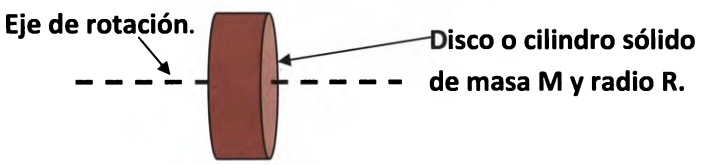


Figura 8.8

El momento de inercia para un aro con espesor delgado, de masa M y radio R, está dado por la siguiente expresión, como se muestra en la figura 8.9.

$$I = MR^2 \tag{8.11}$$

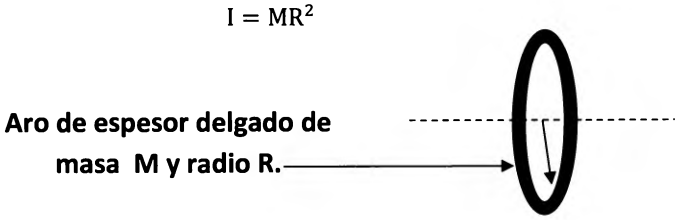


Figura 8.9

El momento de inercia para una esfera de masa M y de radio R, está dado por la siguiente expresión, como se muestra en la figura 8.10.

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \tag{8.12}$$

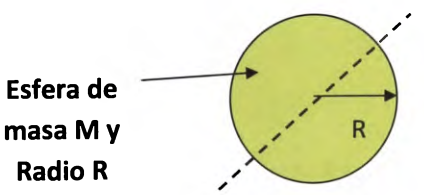


Figura 8.10

El momento de inercia para una barra de masa *M*, longitud *L*, rotando alrededor de su centro de masa, está dado por la siguiente expresión, como se muestra en la figura 8.11

$$I = \frac{1}{12}ML^2 \tag{8.13}$$

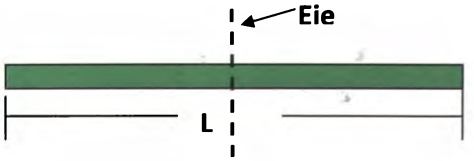


Figura 8.11

ACTIVIDAD 8.6

Se tiene tres cuerpos, una esfera, un anillo de espesor delgado y un cilindro, todos de igual masa *M* e igual radio *R*. Determinar el cuerpo que tenga mayor momento Inercia.

8.6.3 Teorema de Steiner o Ejes Paralelos

El teorema de Steiner, llamado también de los ejes paralelos sirve para determinar el momento de inercia con respecto a un eje paralelo al eje que pasa en el centro de masa.
Este teorema dice que el momento de inercia de un cuerpo que rota alredor de un eje paralelo ö, separado una distancia d, con respecto a un eje que pasa por su centro de masa, es igual al momento de inercia del cuerpo rotando en su centro de masa I_o sumado al producto de la masa del cuerpo *M* por el cuadrado de la distancia entre los ejes paralelos, d^2. Ver ecuación 8.14.

$$I_{ö} = I_o + Md^2 \tag{8.14}$$

Ejemplo 8.6

Una barra de masa M, de longitud L, rota alrededor de un extremo de ésta. Determinar el momento de inercia con respecto al extremo. Ver figura 8.12

Solución:

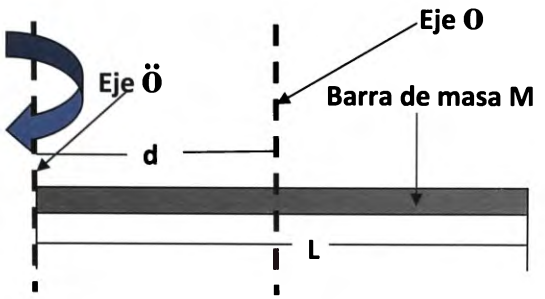


Figura 8.12

De acuerdo a la ecuación 8.13 el momento de inercia de la barra con respecto a un eje que pasa por el centro de masa es: $I = \frac{1}{12}ML^2$. Luego aplicando el teorema de Steiner ecuación 8.14.

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + Md^2$$

La distancia entre los ejes paralelos es d=L/2, reemplazando en la ecuación 8.14, se tiene:

$$I_{\ddot{o}} = I_o + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2 \qquad (8.15)$$

8.7 ANALOGÍA ENTRE LA SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA TRASLACIÓN Y ROTACIÓN

Analogía usando la segunda ley de Newton.

Traslación	Rotación.	
$\sum \vec{F} = m\vec{a}$	$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$	(8.16)

Usando la analogía podemos observar que en la dinámica rotacional vamos a usar la sumatoria de torques igual al momento de inercia (I) multiplicado por aceleración angular $\vec{\alpha}$, para estudiar un cuerpo rígido en rotación pura. En este caso el cuerpo va a rotar con una aceleración angular $\vec{\alpha}$.

Ejemplo 8.7

Sobre un disco de radio *R=0.10 m* y masa *M=1.0 kg* se aplica una fuerza tangencial *F=15 N*, como se indica en la figura 8.13. Se pide:

a) Determinar el momento de inercia del disco con respecto a su eje de rotación.

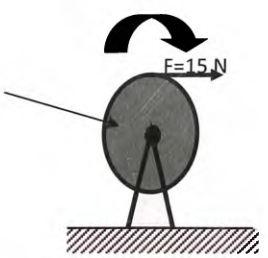


Figura 8.13

b) Determinar la aceleración angular α.

Solución:

a) El momento de inercia de un disco está dado por la ecuación 8.10: $I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}(1.0kg)(0.1m)^2 = 0.005\ kg.m^2$

b) Determinar la aceleración angular α.

Aplicando la ecuación 8.16. $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

$$FR = I\alpha \rightarrow \alpha = \frac{FR}{I} = \frac{(15N)(0.10\,m)}{0.005kg.m^2} = 300\frac{rad}{s^2}$$

$$\alpha = 300\frac{rad}{s^2}$$

Ejemplo 8.8

Sobre un disco de radio R y masa M se aplica una fuerza tangencial F, produciendo una aceleración α, como se indica en la figura 8.14.

Determine la aceleración angular si se cambia otro disco de masa igual a la mitad del disco anterior y duplicándose la fuerza.

Escoja la alternativa correcta.

a) α
b) 2α
c) 3α
d) 4α

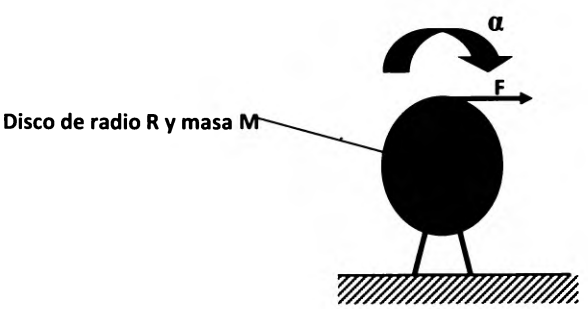


Figura 8.14

Solución:

Aplicando las ecuaciones 8.10 y 8.16, se tiene el $I = \frac{1}{2}MR^2$ y $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

$$FR = \frac{1}{2}MR^2\alpha. \text{ Luego despejando } \alpha = \frac{2F}{MR}$$

Pero si cambiamos el disco por uno de masa $\frac{1}{2}M$ y se aplica una fuerza $2F$.

$$2FR = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M\right)R^2\alpha_2. \text{ Luego despejando } \alpha_2 = 4\left(\frac{2F}{MR}\right)$$

Por lo tanto se tiene $\alpha_2 = 4\alpha$

Ejemplo 8.9

Sobre un cilindro de radio R y masa M se aplica una fuerza tangencial F, produciendo una aceleración α , como se indica en la figura 8.15

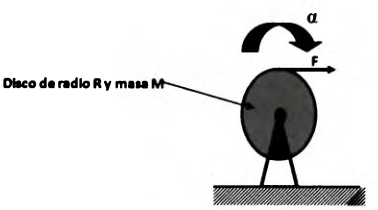


Figura 8.15

Determine las condiciones para obtener una aceleración angular máxima.

a) Aumentar la fuerza, disminuir la masa y aumentar el radio.
b) Aumentar el radio, disminuir la masa y aumentar la fuerza.
c) Aumentar la fuerza, aumentar la masa y aumentar el radio.
d) Disminuir la fuerza, disminuir la masa y disminuir el radio.
e) Aumentar la fuerza, disminuir la masa y disminuir el radio.

Solución:

Aplicando la ecuación 8.10 y 8.16, se tiene $\alpha = \frac{2F}{MR}$, por lo tanto para obtener una aceleración angular máxima se debe aumentar la fuerza, disminuir el radio y la masa. Respuesta: alternativa **e)**.

Ejemplo 8.10

Se tiene un cilindro, una esfera, un disco y un anillo, todos de masa M y radio R. Si a todos se le aplica una fuerza F tangencialmente y rotan alrededor de un eje que pasa por su centro de masa. ¿Cuál de los tres cuerpos adquiere menor aceleración angular?

a) El cilindro.
b) El anillo.
c) El disco.
d) Todos tienen la misma aceleración angular.

Solución:

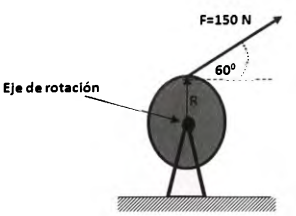
Revisando los momentos de inercia de los tres cuerpos tenemos:

$$I_{cilindro} = \frac{1}{2}MR^2 \text{ , } I_{esfera} = \frac{2}{5}MR^2, I_{disco} = \frac{1}{2}MR^2 \text{ y } I_{anillo} = MR^2.$$

El torque es el mismo $\tau = FR$ para los cuatro cuerpos, por lo tanto, el cuerpo que tenga mayor momento de inercia tendrá menor aceleración. En este caso el anillo tendrá menor aceleración angular.

ACTIVIDAD 8.7

Carlos aplica una fuerza *F=150 N* con un angulo de 60^0 con la horizontal sobre una polea de *R=0.25m*, como se indica en la figura. Calcule la magnitud del torque aplicado con respecto al eje de rotación.



Ejemplo 8.11

Dos masas de *4m* y *2m* están suspendidas de los extremos de una cuerda que pasa por una polea de masa *2m* y de radio *R*, como se indica en la figura 8.16.

Si se considera la polea como un disco, se pide:

a) Determinar la aceleración angular del disco.
b) Determinar la aceleración de las masas.
c) Determinar las tensiones de la cuerda.

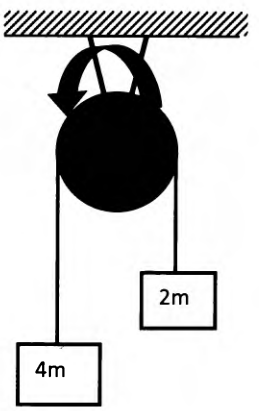


Figura 8.16

Solución:

Diagrama de cuerpo libre de la masa *4m*.

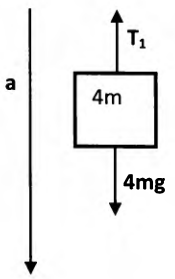
Aplicando sumatoria de fuerzas en la dirección y.

$$\sum F_y = Ma_y$$

$$4mg - T_1 = 4m.a$$

La aceleración a= αR

$$4mg - T_1 = 4m\alpha R \quad (1)$$



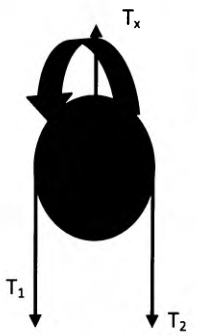
Aplicando la sumatoria de torques en la polea.

$$T_1.R - T_2R = I\alpha$$

La polea se puede analizar como un disco.

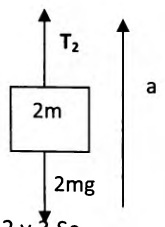
$$T_1.R - T_2R = \frac{1}{2}(2m)R^2\alpha$$

$$T_1 - T_2 = mR\alpha \quad (2)$$



Aplicando la sumatoria de fuerzas al cuerpo de masa 2m.

$$T_2 - 2mg = 2mR\alpha \quad (3)$$



Resolviendo las ecuaciones 1,2 y 3.Se despeja la aceleración angular.

Sumamos las ecuaciones (1) y (2)

$$4mg - T_1 = 4m\alpha R \quad (1)$$

$$T_1 - T_2 = mR\alpha \quad (2)$$

$$4mg - T_2 = 5mR\alpha \quad (4)$$

Sumando la ecuación (4) y (3)

$$4mg - T_2 = 5mR\alpha \quad (4)$$

$$T_2 - 2mg = 2mR\alpha \quad (3)$$

$$4mg - 2mg = 7mR\alpha \quad (5)$$

Se obtiene $\boldsymbol{\alpha = \frac{2g}{7R}}$

b) Determinar la aceleración de las masas.

La aceleración de las masas corresponde a la aceleración tangencial $a = \alpha R$.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{2\,g}}{\mathbf{7\,R}}.R = \frac{2}{7}g$$

c) Determinar las tensiones de la cuerda.

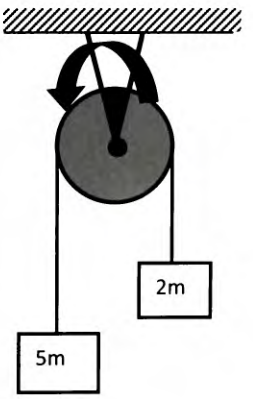
La tensión T_1 se despeja de la ecuación (1) $T_1 = 4mg - 4m\left(\frac{2}{7}g\right) = \frac{20}{7}$ mg.

La tensión T_2 se despeja de la ecuación (4) $T_2 = 4mg - 5m\left(\frac{2}{7}g\right) = \frac{18}{7}mg$.

ACTIVIDAD 8.8

Dos masas de *5m* y *2m* están suspendidas de los extremos de una cuerda que pasa por una polea de masa *m* y de radio *R*, como se indica en la figura.
Si se considera la polea como un disco, se pide:

a) Determinar la aceleración angular del disco.
b) Determinar la aceleración de las masas
c) Determinar las tensiones de la cuerda.



8.8 ENERGÍA CINÉTICA TRASLACIONAL Y ROTACIONAL

Cuando un disco rueda sin deslizarse desde la parte superior de un plano inclinado, el centro de masa de este cuerpo se traslada y rota, por lo tanto, el disco tendrá energía traslacional y rotacional. Ver Figura 8.17.

La energía cinética de traslación está dado por:

$$K_{traslacional} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 \qquad (8.17)$$

La energía cinética rotacional está dado por:

$$K_{rotacional} = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (8.18)$$

Mientras el disco rueda hacia abajo, la fuerza de fricción tiene, a cada instante, un punto nuevo de contacto, no tiene desplazamiento y por lo tanto la fuerza de fricción estática en este caso **NO REALIZA TRABAJO.**

Como la fuerza de fricción no realiza trabajo la energía total mecánica se mantiene constante.

$$E_1 = E_2 = constante$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2 + m g y_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2 + m g y_2 \qquad (8.19)$$

Es importante recalcar que la fuerza de fricción en este caso no disipa energía, por lo tanto la energía mecánica se conserva.

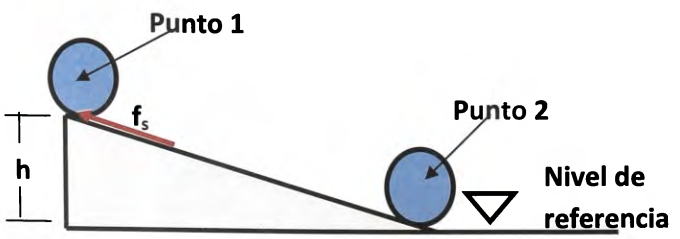


Figura 8.17

Ejemplo 8.12

Un disco de masa *m*, radio *R*, se deja caer desde lo alto de un plano inclinado de *h=15 R*, como se indica en la figura 8.18. Determinar la velocidad del centro de masa del disco en la parte más baja del plano inclinado.

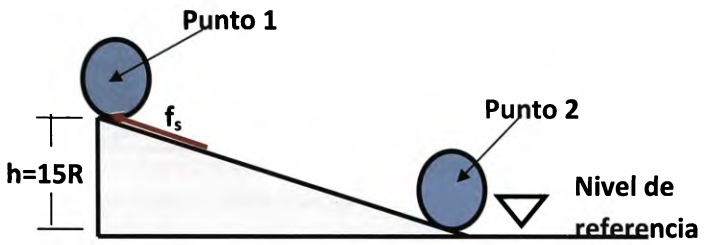


Figura 8.18

Solución:

Como la fricción no realiza trabajo se puede aplicar la conservación de la energía mecánica entre los puntos 1 y 2.

Aplicando la ecuación 8.19, se tiene:

$$\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}I\omega_1^2+mgy_1=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}I\omega_2^2+mgy_2$$

El disco se suelta desde el reposo, por lo tanto v_1=0 y ω_1=0

El punto y_2= *0* porque está en el nivel de referencia.

La rapidez angular puede escribirse en función de la velocidad de traslación del centro de masa como $\omega=\frac{v}{R}$.

El momento de inercia para un disco es: $I=\frac{1}{2}mR^2$

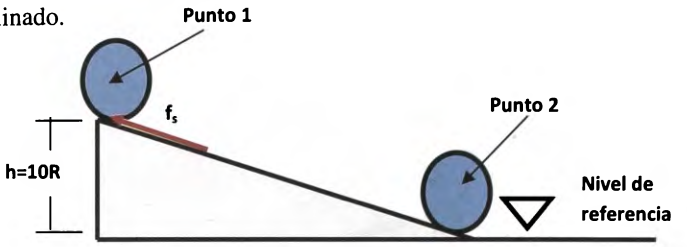
$$0+0+mg(15R)=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v_2}{R}\right)^2+0$$

$$mg(15R)=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{4}mv_2^2$$

$$mg(15R)=\frac{3}{4}mv_2^2 \rightarrow \boldsymbol{v_2=\sqrt{20gR}}$$

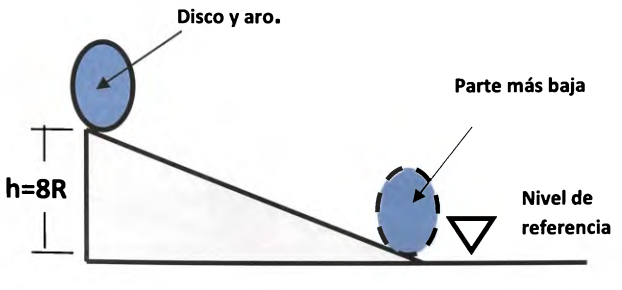
ACTIVIDAD 8.9

Una esfera de masa *m*, radio *R*, se deja caer desde lo alto de un plano inclinado de *h=10 R*, como se indica en la figura. Determinar la rapidez angular y tangencial de la esfera en la parte más baja del plano inclinado.



ACTIVIDAD 8.10

Desde lo alto de un plano inclinado se sueltan, desde el reposo, un disco y un aro (anillo) de espesor delgado, todos con la misma masa M y radio R, como se muestra en la figura, determine la rapidez tangencial del disco y del anillo en la parte más baja del plano inclinado.



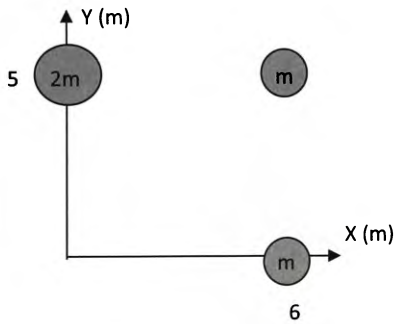
PROBLEMAS.

1) Con relación al torque. Podemos afirmar que:
   a) Es una cantidad escalar.
   b) Es cero cuando la fuerza es perpendicular al radio de aplicación de la fuerza.
   c) Es máximo cuando la fuerza es paralela al radio de aplicación de la fuerza.
   d) Es una cantidad vectorial.

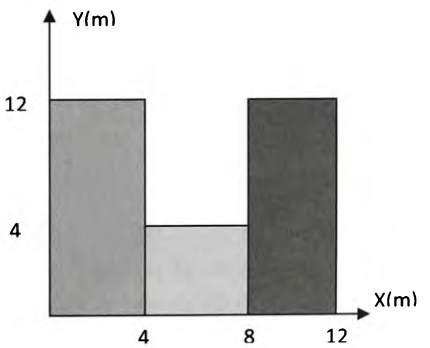
2) Con relación al centro de masa. Escoja la alternativa correcta.
   a) Es el punto donde se considera está concentrado todo su peso.
   b) Está en el cuerpo.
   c) Es el punto donde se considera concentrado la masa y el peso.
   d) Puede estar dentro o fuera del cuerpo.

3) De acuerdo a la siguiente distribución de masas puntuales. Determinar las coordenadas del centro de masa.

	X (m)	Y(m)
a)	15/4	3
b)	3	15/4
c)	5	3
d)	3	5

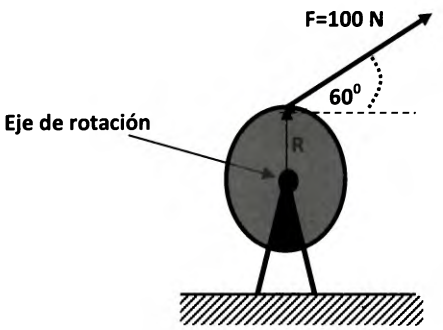


4) De acuerdo a la figura mostrada, formada por un conjunto de placas homogéneas y de espesor constante. Determinar el centro de masa del sistema.
   a) X=6 ; y=152/28
   b) X=3 ; y=162/27
   c) X=6 ; y=38/7
   d) X=5 ; y=162/33



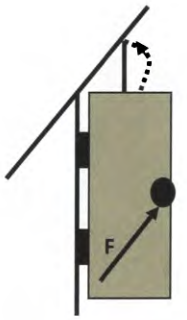
5) Carlos aplica una fuerza F=100 N con un angulo de 60^0 con la horizontal sobre una polea de R=0.5m, como se indica en la figura. El torque con respecto al eje de rotación es:

a) 25 N
b) 50 N
c) 75 N
d) 0 N



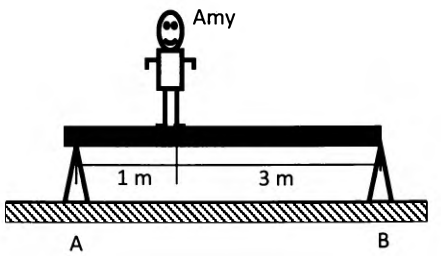
6) Mirella aplica una fuerza F=10 N para abrir una puerta de 1m x 2m, como se indica en la figura. Determinar el torque aplicado considerando que se aplica la fuerza perpendicularmente a la puerta.

a) 10 N.m
b) 20 N.m
c) 15 N.m
d) 0



7) Amy pesa 500 N y está parada sobre una tabla de peso de 100 N, 4m de longitud, la cual está apoya en sus dos extremos, como se indica en la figura. Las fuerzas de reacción en los apoyos A y B son:

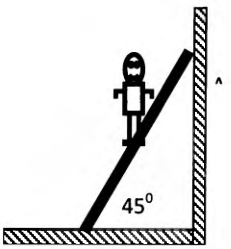
	A	B
a)	300 N	300 N
b)	100 N	500 N
c)	200 N	400 N
d)	425 N	175 N



8) Con relación al problema siete, si Amy decide pararse en el centro de la tabla. Las reacciones en los apoyos son:

	X	Y
a)	300 N	300 N
b)	200 N	400 N
c)	100 N	500 N
d)	400 N	200 N

9) Andrés que pesa 800 N, está parado en el centro de una escalera de longitud L, de peso despreciable, que se encuentra apoyada en el piso a 45^0 y a una pared vertical lisa, como se muestra en la figura. La reacción en el apoyo A de la escalera con la pared vertical es:



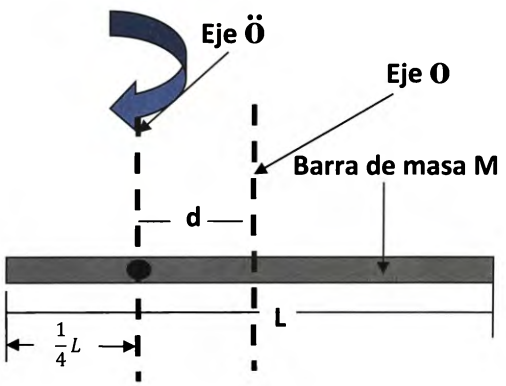
a) 200 N
b) 200 N
c) 300 N
d) 400 N

10) Con relación al problema nueve. La fuerzas de reacción en el punto de apoyo de la escalera con el piso horizontal son:

	R_x	R_y
a)	400 N	400 N
b)	400N	800 N
c)	800 N	400 N
d)	200 N	600 N

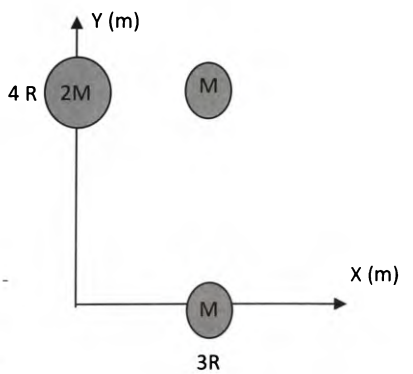
11) Una barra gira con respecto al eje ö a una distancia de ¼ L con respecto a un extremo, como se indica en la figura. Determinar el momento de inercia con respecto al eje de rotación ö .

a) $I_{ö} = \frac{7}{18}ML^2$
b) $I_{ö} = \frac{1}{12}ML^2$
c) $I_{ö} = \frac{1}{3}ML^2$
d) $I_{ö} = \frac{7}{48}ML^2$
e) $I_{ö} = \frac{3}{16}ML^2$



12) Dado el siguiente sistemas de masas puntuales, mostrados en la figura. El momento de inercia con respecto al origen de coordenadas es:

a) $32MR^2$
b) $9MR^2$
c) $25MR^2$
d) $66MR^2$



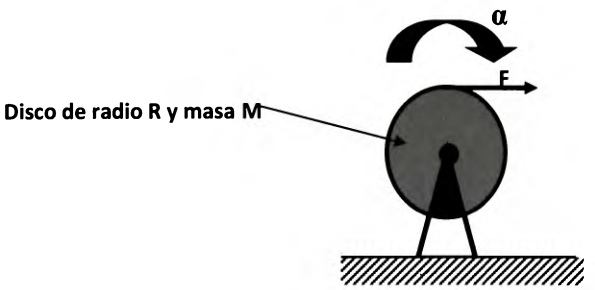
13) A un disco de masa M=2 kg , radio R=1m se aplica una fuerza de F= 20 N , como se indica la figura. La aceleración angular α que adquiere el disco es:

a) $\alpha = 5\frac{rad}{s^2}$

b) $\alpha = 10\frac{rad}{s^2}$

c) $\alpha = 15\frac{rad}{s^2}$

d) $\alpha = 20\frac{rad}{s^2}$



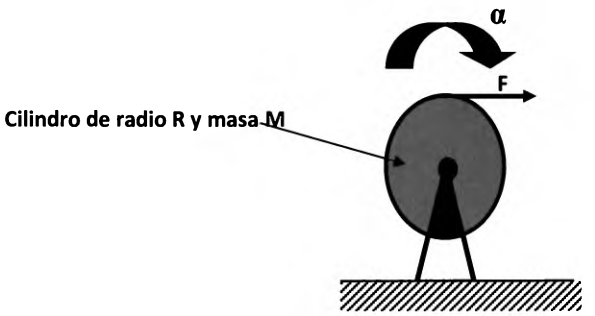
14) A un cilindro de masa M y radio R que rota alrededor de un eje que pasa por su centro de masa, se la aplica una fuerza F produciendo en él una aceleración angular α, como se indica en la figura. Si sobre otro cilindro de masa M y radio 1/3 de R , se le aplica una fuerza 3F, la aceleración angular que adquiere este cilindro es:

a) $\alpha_2 = 2\alpha$

b) $\alpha_2 = 4\alpha$

c) $\alpha_2 = 6\alpha$

d) $\alpha_2 = 8\alpha$



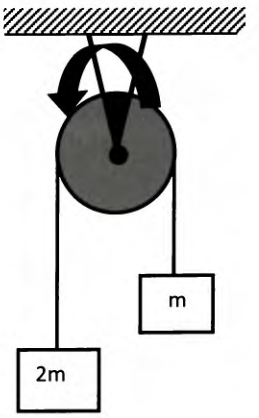
15) Dos masas de 2m y m están suspendidas de los extremos de una cuerda que pasa por una polea de masa m y de radio R, como se indica en la figura. La aceleración angular de la polea es:

a) $\alpha = \frac{2}{3}\frac{g}{R}$

b) $\alpha = \frac{2}{5}\frac{g}{R}$

c) $\alpha = \frac{2}{7}\frac{g}{R}$

d) $\alpha = \frac{2}{9}\frac{g}{R}$



16) Con relación al problema 15, la tensión de la cuerda sobre la masa m es:

a) $T = \frac{9}{7}mg$ b) $T = \frac{7}{9}mg$ c) $T = \frac{5}{7}mg$ d) $T = \frac{2}{3}mg$

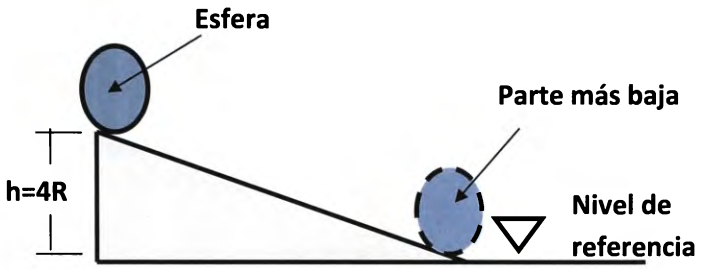
17) Una esfera de masa M y radio R, se suelta desde el reposo desde lo alto de un plano inclinado de altura h=4R. Si la esfera desciende sin deslizar, entonces la velocidad del centro de masa de la esfera, al llegar a la parte más baja del plano inclinado es: (Ver figura).

a) $V = 2\sqrt{\frac{10}{7}gR}$

b) $V = \frac{4}{3}\sqrt{gR}$

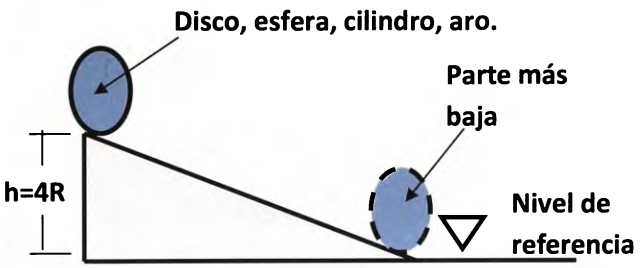
c) $V = \sqrt{8gR}$

d) $V = 4\sqrt{gR}$

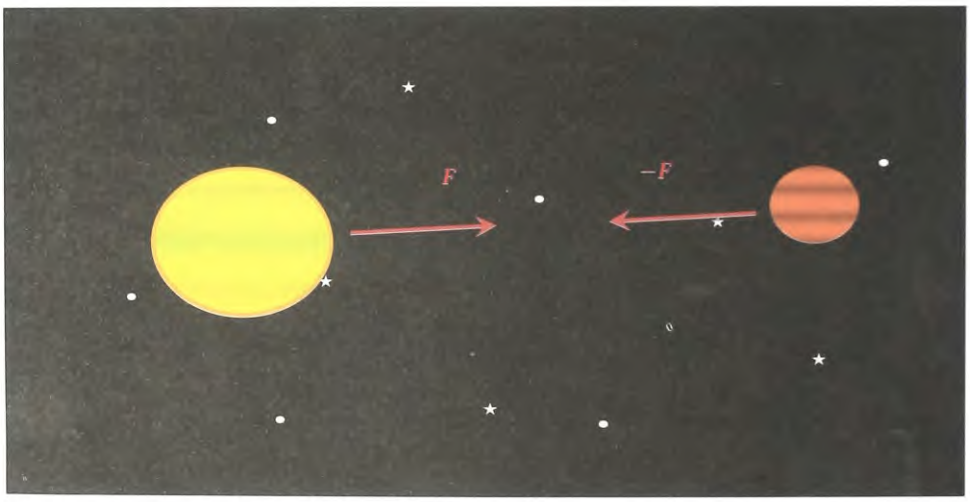


18) Desde lo alto de un plano inclinado se suelta, desde el reposo, un disco, una esfera, un cilindro y un aro (anillo), todos con la misma masa M y radio R. ¿Cuál de los cuerpos llega primero a la parte inferior del plano inclinado?

a) El disco
b) La esfera
c) El cilindro
d) El aro
e) Todos llegan al mismo tiempo



GRAVITACIÓN UNIVERSAL



CAPÍTULO 9

INTRODUCCIÓN

Hasta este momento hemos estudiado el movimiento circular, dinámica del movimiento circular, donde estudiamos la fuerza centrípeta. Ahora vamos a estudiar la fuerza gravitacional, el movimiento de los planetas y los satélites, sus órbitas, sus velocidades, energía potencial, velocidad de escape, energía total mecánica, las leyes de Kepler y la ingravidez.

Una de las principales causas del movimiento circular de los planetas y satélites es la fuerza gravitacional asociada con la fuerza centrípeta.

9.1 LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Otra de las leyes importantes de la Física es la ley de la gravitación universal y sus efectos se hacen sentir sobre todos los cuerpos que tengan masa. Los sentimos en todos lados sobre el planeta Tierra y en cualquier parte del Universo.

9.2 FUERZA GRAVITACIONAL

Hace muchos años Isaac Newton publicó la ley de Gravitación Universal en la que dice: "Todos los cuerpos en el universo experimentan fuerzas de atracción entre sí debido a que poseen masa gravitacional, esta fuerza es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros de masa".

La magnitud de la fuerza gravitacional está dada por la siguiente expresión:

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{9.1}$$

Donde G es la constante de gravitación Universal:

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\frac{N.m^2}{kg^2}$$

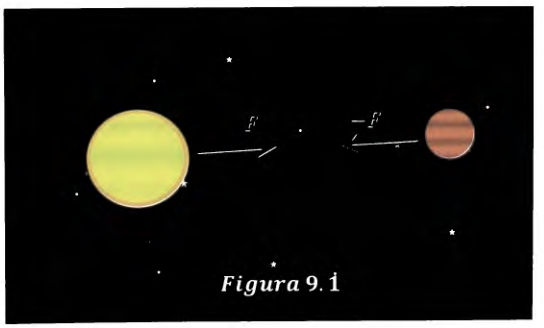


Figura 9.1

Es importante recalcar que la fuerza $\vec{F}$ tiene la misma magnitud para los dos cuerpos pero actúa en cuerpos diferentes, como se aprecia en la figura 9.1. Esto se explica por la tercera ley de Newton de acción y reacción.

9.3 GRAVEDAD SOBRE LA SUPERFICIE DE LOS PLANETAS

Para determinar la aceleración de la gravedad sobre la superficie de cualquier planeta, consideremos un cuerpo de masa m sobre la superficie de un planeta de masa M y de radio R como se puede observar en la figura 9.2.

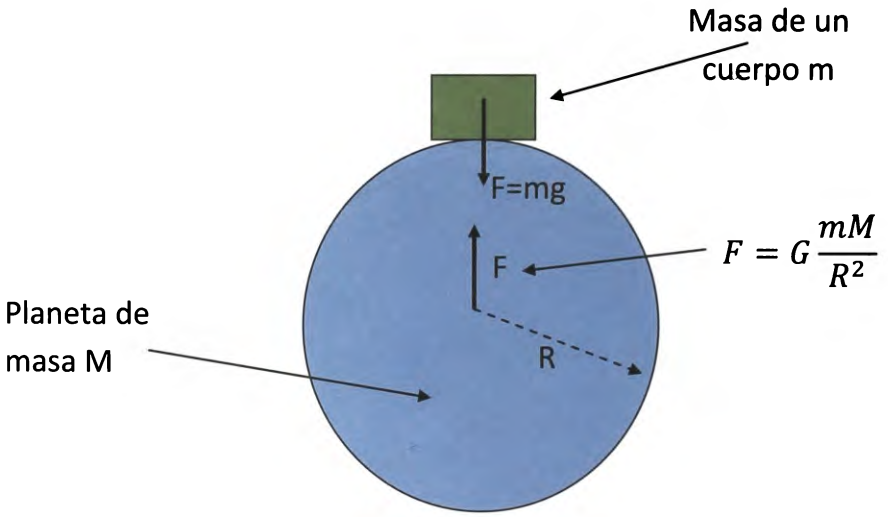


Figura 9.2

De acuerdo a la ley de gravitación universal el planeta ejerce una fuerza de atracción sobre el cuerpo de masa m, dada por: $F = mg$.

El cuerpo también ejerce una fuerza de atracción sobre el planeta de igual magnitud pero dirección opuesta F, que de acuerdo a la Ley de la Gravitación Universal puede expresarse de acuerdo a la siguiente expresión:

$$F = G\frac{mM}{R^2}$$

Igualando las fuerzas gravitacionales y simplificando se llega a determinar la aceleración sobre el planeta.

$$mg = G\frac{mM}{R^2} \qquad Se\ tiene \quad g = G\frac{M}{R^2} \tag{9.2}$$

Ejemplo 9.1

El radio promedio de la Tierra es $R = 6.37 \times 10^6$m. Si se conoce que la Tierra tiene una masa de $M = 5.98 \times 10^{24}\ kg$. Determine la aceleración de la gravedad que experimenta un cuerpo de masa m que se encuentra sobre la superficie de la misma.

Solución

La magnitud de la aceleración de la gravedad que experimenta un cuerpo sobre la superficie de la Tierra es:

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

Por lo tanto, reemplazando los valores se obtiene la aceleración.

$$g = G\frac{M}{R^2} = 6.67 \times 10^{-11}\frac{N.m^2}{kg^2}\frac{5.98 \times 10^{24}\ kg}{(6.37 \times 10^6 m)^2} = 9.8\frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 9.2

La aceleración de la gravedad sobre la superficie lunar es $1.67\ m/s^2$. Si se conoce que el radio promedio de la Luna es $R = 1738 \times 10^3\ m$. Determinar la masa de la Luna.

Solución

Despejando de la ecuación 9.2 la masa de la Luna se tiene:

$$M_{Luna} = \frac{gR^2}{G} = \frac{\left(1.67\frac{m}{s^2}\right)(1738 \times 10^3 m)^2}{\left(6.67 \times 10^{-11}\frac{N.m^2}{kg^2}\right)} = 7.56 \times 10^{22} kg$$

Ejemplo 9.3

Una avioneta que vuela a una altura de $12500\ m$ sobre la superficie terrestre deja caer un cuerpo de masa m, como se observa en la figura 9.3. Conociendo el radio de la Tierra $R = 6.37 \times 10^6\ m$ y la masa de la Tierra $M = 5.98 \times 10^{24}\ kg$, determine la aceleración de la gravedad que experimenta el cuerpo a esa altura.

Solución

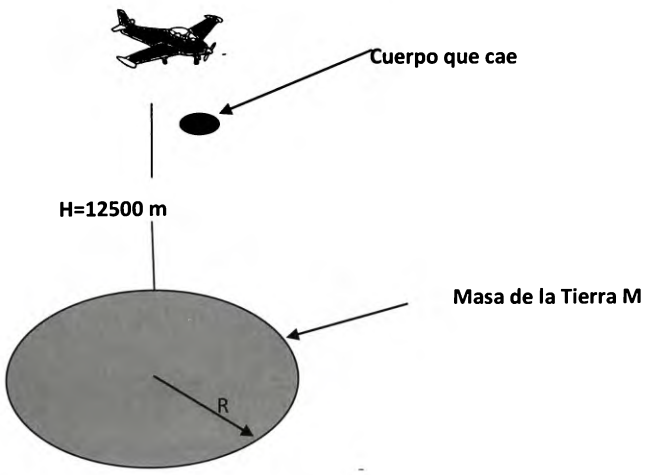


Figura 9.3

La distancia del centro de la Tierra hasta el cuerpo es $r = R + H$.

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

$$g = 6.67 \times 10^{-11}\frac{\text{N.m}^2}{\text{kg}^2}\frac{5.98 \times 10^{24}\ \text{kg}}{(6.37 \times 10^6\text{m} + 12500\ \text{m})^2}$$

$$g = 9.79\frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 9.4

Un planeta X tiene una masa M, un radio R y una gravedad g. Determine la gravedad en un planeta Y, de masa $4M$ y de radio $8R$ en términos de la gravedad del planeta X.

Solución

La aceleración sobre el planeta X está dada por la siguiente expresión:

$$g_x = G\frac{M}{R^2}$$

La aceleración sobre el planeta Y está dada por la siguiente expresión:

$$g_y = G\frac{4M}{(8R)^2} = G\frac{4M}{64R^2} = G\frac{M}{16R^2}$$

Dividiendo las dos expresiones, se tiene:

$$\frac{g_y}{g_x} = G\frac{M}{16R^2} \times \frac{R^2}{GM} = \frac{1}{16}$$

La gravedad del planeta Y es la décima sexta parte de la gravedad en el planeta X.

$$g_y = \frac{1}{16}\, g_x$$

Ejemplo 9.5

Si la masa de un planeta es M, su radio R y su aceleración de la gravedad sobre la superficie es g. Determine la aceleración de la gravedad en el centro del planeta.

Solución:

La masa encerrada a una distancia r del centro de la Tierra es: $m' = \frac{r^3}{R^3}M$

La fuerza gravitacional de un cuerpo sobre la superficie de la masa encerrada está dada por:

$$mg_r = G\frac{m \times m'}{r^2} = G\frac{m}{r^2} \times \frac{r^3}{R^3}M = G\frac{mM}{R^3}r$$

Simplificando la masa m, se tiene que la $g_r = G\frac{M}{R^3}r$

Debido que la gravedad g_r varía linealmente con r, la gravedad toma un valor cero en el centro del planeta hasta un valor g en la superficie del mismo a un radio R.

ACTIVIDAD 9.1

Un planeta X tiene una masa M, radio R y una gravedad g. Determine la gravedad en un planeta Y, de masa $2M$ y de radio $6R$ en términos de la gravedad del planeta X.

Resp: $g_y = \frac{1}{18}\, g_x$

¿Cuál será la aceleración de la gravedad en un punto dentro del planeta X a un radio $r = R/2$?

Resp: ½ g

9.4 ÓRBITA DE LOS PLANETAS

De acuerdo a una de las leyes de Johannes Kepler, las órbitas de los planetas son elípticas alrededor del Sol siendo este un punto focal, pero las órbitas de la mayoría de los planetas se pueden considerar casi circulares excepto algunos planetas como Marte, Mercurio, etc.

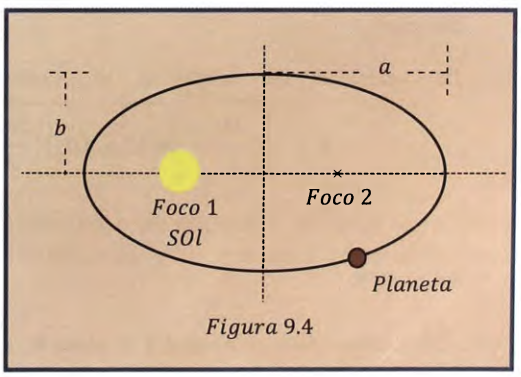


Figura 9.4

Para la mayoría de los planetas la relación entre los semiejes menor y mayor, b/a, es aproximadamente 1(0.99986), por tal motivo para hacer un análisis menos complejo pueden considerarse aproximadamente órbitas circulares, como se observa en la figura 9.4.

9.5 VELOCIDAD DE ÓRBITAS DE LOS SATÉLITES

Como se explicó que las órbitas de los planetas y satélites se pueden considerar circulares, entonces se analizará un satélite de masa m, orbitando un planeta de masa M, a una distancia R, como se indica en la figura 9.5.

Como el satélite está en órbita circular experimenta una fuerza centrípeta y esa fuerza la igualamos a la fuerza gravitacional

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$$

Luego simplificando la masa m y el radio R, se tiene la velocidad de órbita el satélite.

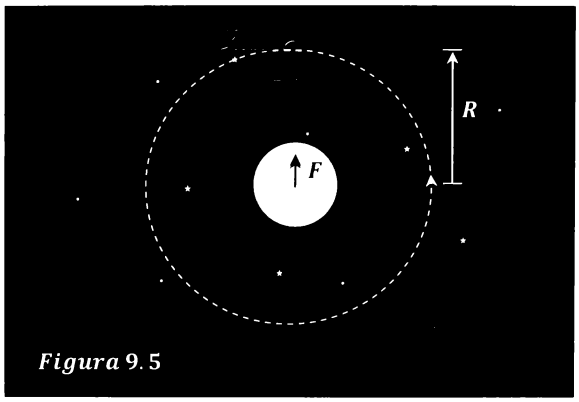


Figura 9.5

$$v = \sqrt{G\frac{M}{R}} \tag{9.3}$$

Ejemplo 9.6

Un satélite orbita la Tierra a una distancia de su centro de masa de dos veces el radio de la Tierra ($2R$). Conociendo que el radio de la Tierra es $R = 6.37 \times 10^6\, m$ y la masa $M = 5.98 \times 10^{24}\, kg$, determine la velocidad que debe tener el satélite para orbitar la Tierra a esa distancia.

Solución

La velocidad de órbita de un satélite está dada por la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{6.67 \times 10^{-11}\frac{\text{N.m}^2}{\text{kg}^2}\frac{5.98 \times 10^{24}\,\text{kg}}{2(6.37 \times 10^6\,\text{m})}} = 5595.4\frac{m}{s}$$

Ejercicio propuesto

Un satélite orbita un planeta X de masa M, a una distancia r y con una velocidad v. Si el mismo satélite orbita otro planeta Y, de masa $3M$ y radio $6r$, determinar la velocidad de órbita del satélite alrededor del planeta Y.

Solución:

La velocidad de órbita del satélite alrededor del planeta X está dada por la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

La velocidad de órbita del satélite alrededor del planeta Y está dada por la siguiente expresión:

$$v_y = \sqrt{G\frac{3M}{6r}}$$

Dividiendo la velocidad del satélite en $\boldsymbol{Y}$ sobre la velocidad del satélite en $\boldsymbol{X}$ se tiene:

$$\frac{v_y}{v} = \frac{\sqrt{G3M}}{\sqrt{6r}} \times \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{GM}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto la velocidad en Y es:

$$v_y = \frac{1}{\sqrt{2}}v$$

ACTIVIDAD 9.2

Un satélite orbita un planeta X de masa m, a un radio r y con una velocidad v. Si el mismo satélite orbita otro planeta Y, de masa $2M$ y radio $8r$, determinar la velocidad de órbita del satélite alrededor del planeta Y. Resp: $v_y = \frac{\sqrt{3}}{3}v$

ACTIVIDAD 9.3

Un satélite gira alrededor de la Tierra con rapidez v y a una distancia r del centro de la Tierra. Si otro satélite gira alrededor de la Tierra a una distancia igual a r desde el centro de la Tierra, ¿pueden tener la diferente rapidez? Explique.

9.6 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL

La energía potencial $U = mgh$, que se ha estudiado en capítulos anteriores es válida sólo cuando el cuerpo está cerca de la superficie terrestre y en esos casos se acostumbra a colocar el sistema de referencia en la Tierra, considerando la energía potencial cero en ella.

Ahora consideremos un cuerpo de masa m situado a una distancia r de un planeta X, como se indica in la figura 9.6.

El trabajo realizado por la fuerza F a lo largo de la trayectoria del punto A hasta el punto B está dado por: $U_f - U_i = -GMm\left[\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right]$ donde r_f y r_i son las distancias, desde el centro de la Tierra, de los puntos B y A repectivamente.

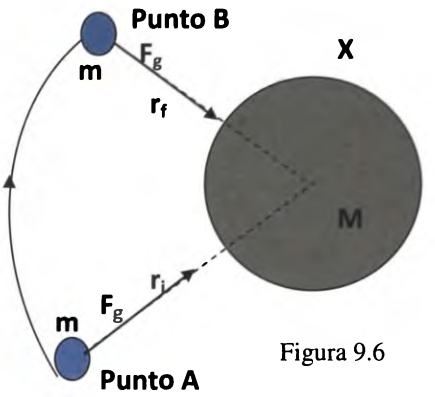


Figura 9.6

Para este caso se elige un nivel de referencia en el infinito para que r_i se haga tan grande y $1/r_i$ tienda a cero. Por lo tanto, U_i tiende a cero en el infinito.

De la variación de energía potencial

$$U_f - U_i = -GMm\left[\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right]$$

Con las consideraciones antes mencionadas se puede escribir la energía potencial asociada a la masa m y al planeta X de masa M.

$$U_f = -GMm\left[\frac{1}{r_f}\right]$$

Por la tanto de forma general la energía potencial asociada a dos partículas de masas m_1 y m_2, separadas una distancia r. Se puede escribir de la siguiente forma.

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r} \qquad (9.4)$$

Si hubiera más partículas, como por ejemplo tres, la energía potencial asociada a las tres partículas puede escribirse de la siguiente forma:

$$U = -\left[\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}}\right]$$

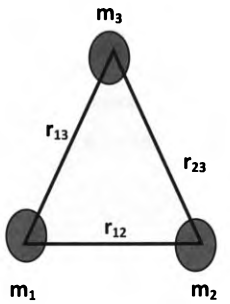


Figura 9.7

U representa la energía potencial gravitacional total que se necesita para traer las tres masas desde el infinito y colocarlas en ese arreglo como se puede apreciar en la figura 9.7.

9.7 TRABAJO REALIZADO PARA PONER EN ÓRBITA UN SATÉLITE ALREDEDOR DE UN PLANETA.

El trabajo necesario para poner en órbita un satélite de masa m, a una órbita de radio R, desde la superficie de un planeta de masa M y de radio r, como se muestra en la figura 9.8, está dado por $\boldsymbol{W = U_2 - U_1}$.

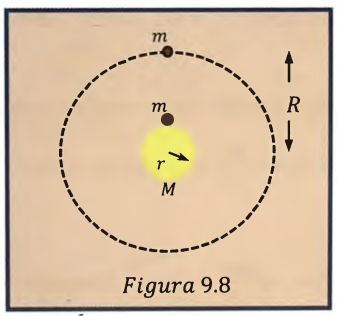


Figura 9.8

El trabajo para llevar de la superficie del planeta hasta la órbita indicada esta dado por:

$$W = U_2 - U_1 = \left[-G\frac{Mm}{R}\right] - \left[-G\frac{Mm}{r}\right] \qquad (9.5)$$

Ejemplo 9.8

El trabajo para poner en órbita un satélite de masa m desde la superficie de la Tierra de masa M, radio r es $\boldsymbol{W = \frac{4}{5}\frac{GMm}{r}}$. Determinar el radio R de la órbita alcanzada.

Solución

$W = U_2 - U_1 = \left[-G\frac{Mm}{R}\right] - \left[-G\frac{Mm}{r}\right] = \frac{4}{5}\frac{GMm}{r}$ despejando, el radio $R = 5\,r$

ACTIVIDAD 9.4

Si la masa de la Tierra es M y el radio es R. Determine el trabajo necesario para poner en órbita un satélite de masa m alrededor de la Tierra a un radio $r = 4R$. Resp: $\frac{3}{4}\frac{GMm}{r}$

9.8 VELOCIDAD DE ESCAPE DE UN SATÉLITE

La velocidad de escape de un satélite es la velocidad que se necesita impartirle al mismo para moverse hasta una distancia infinita donde su energía potencial gravitacional es cero ($U = 0$) y llega con una velocidad cero ($K = 0$), por lo tanto, su energía total será también cero ($E = 0$).Ver Figura 9.9.

En el punto de lanzamiento, l satélite tiene energía potencial y cinética.

La Energía potencial es $U = -G\frac{Mm}{R}$ y la energía cinética es $K = \frac{1}{2}mv^2$

La energía total es $E = 0 = -G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv^2$. Despejando la velocidad de escape v se tiene que:

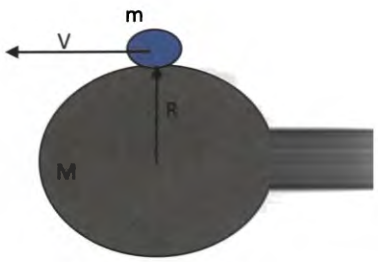


Figura 9.9

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad (9.6)$$

Ejemplo 9.9

El radio promedio de la Tierra es $R = 6.37 \times 10^6 m$. Si se conoce que la Tierra tiene una masa de $M = 5.98 \times 10^{24}$ kg . Determine la velocidad de escape de un satélite desde la superficie de la Tierra.

Solución:

Datos:

$$R = 6.37 \times 10^6\ m$$

$$M = 5.98 \times 10^{24}\ kg$$

La velocidad de escape de un satélite de un planeta está dada por la ecuación 9.6. $v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$.

Reemplazando los datos en la ecuación 9.6 se tiene:

$$v = \sqrt{\frac{2\left(6.67 \times 10^{-11}\frac{N.m^2}{kg^2}\right)(5.98 \times 10^{24}\ kg)}{6.37 \times 10^6 m}} = 11191\ m/s$$

ACTIVIDAD 9.5

El radio promedio de la Luna es $R = 1.738 \times 10^6 m$. Si se conoce que la Luna tiene una masa de $M = 7.34 \times 10^{22}\ kg$. Determine la velocidad de escape de un satélite de la superficie de la Luna.

Resp: 2373.6 m/s

ACTIVIDAD 9.6

¿Depende la velocidad de escape de un satélite de la dirección con la que fue lanzado? Explique.

9.9 ENERGÍA TOTAL DE UN SATÉLITE EN ÓRBITA

Cuando un satélite está orbitando un planeta, el satélite tiene energía potencial y gravitacional, como puede observar en la figura 9.10.

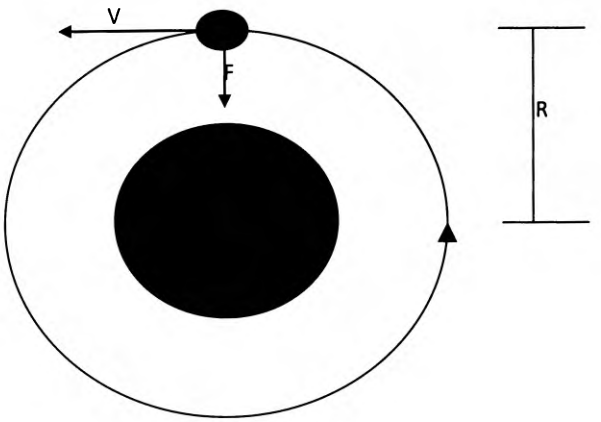


Figura 9.10

La energía cinética es $K = \frac{1}{2}mv^2$, la energía potencial $U = -G\frac{Mm}{R}$

La Fuerza centrípeta es $F = m\frac{v^2}{R}$

si a esta igualdad le multiplicamos por $R/2$.

$$\frac{FR}{2} = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \frac{FR}{2} = K \text{ (K es la Energía cinética)}$$

Como la fuerza centrípeta F es igual a la fuerza gravitacional $F = G.\frac{Mm}{R^2}$, esta fuerza se reemplaza en $\frac{FR}{2} = K$. Por lo tanto se tiene:

$$K = \frac{FR}{2} = G\frac{Mm}{R^2} \times \frac{R}{2} = G\frac{Mm}{2R}$$

La energía cinética $K = G\frac{Mm}{2R}$

La energía total $E = U + K$, donde. $E = -G\frac{Mm}{R} + G\frac{Mm}{2R}$

Resolviendo para E, se obtiene la siguiente expresión

$$\mathrm{E} = -\mathrm{G}\frac{\mathrm{Mm}}{2\mathrm{R}} \tag{9.7}$$

Así, se observa que la energía mecánica total es negativa y disminuye con R.

Ejemplo 9.10

Un cuerpo se suelta desde el reposo a una distancia de $6R$ del centro del planeta Tierra. Si el radio de la Tierra es R y la masa M, la velocidad con que impacta en la superficie terrestre es: Nota: expresar la respuesta en términos de la masa M, radio de la Tierra R y la constante de gravitación universal G.

Solución:

El cuerpo que se suelta del reposo tiene energía cinética cero pero si tiene energía potencial U.

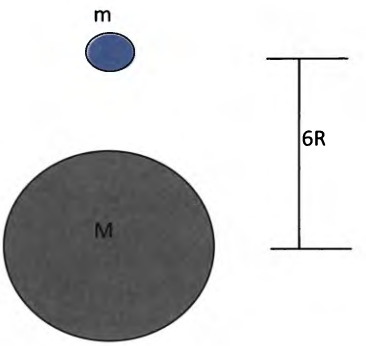


Figura 9.11

La energía potencial es $U = -G\frac{Mm}{6R}$

Cuando el cuerpo impacta el planeta tiene energía cinética y potencial. La energía cinética es $K = \frac{1}{2}mv^2$ y la potencial es $U = -G\frac{Mm}{R}$. Como es sistema es conservativo se puede igualar la energía total en la posición inicial y final.

$$0 + -G\frac{Mm}{6R} = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right)$$

Despejando la velocidad de impacto se tiene $v = \sqrt{\frac{5}{3}G\frac{M}{R}}$

b) Determinar la energía total del cuerpo al momento del impacto.

La energía total está constituida por la cinética K y la potencial U. La energía cinética se la puede expresar $K = FR/2$, reemplazando la fuerza gravitacional, se tiene. $K = G\frac{Mm}{2R}$. La energía potencial es $U = -G\frac{Mm}{R}$.

La energía total es $E = K + U = \left[G\frac{Mm}{2R}\right] + \left[-G\frac{Mm}{R}\right] = -G\frac{Mm}{2R}$

ACTIVIDAD 9.5

Un cuerpo se suelta desde el reposo a una distancia de $4R$ del centro del planeta Tierra. Si el radio de la Tierra es R y la masa M. Se pide:

a) Calcule la velocidad con que impacta en la superficie terrestre es:
b) Determine la energía total del cuerpo al momento del impacto.

Nota: expresar la respuesta en términos de la masa M, radio de la Tierra R y la constante de gravitación universal G.

9.10 LEYES DE JOHANNES KEPLER

Johannes Kepler después de algunos años de estudio acerca del movimiento de los planetas, propuso sus tres leyes.

PRIMERA LEY DE KEPLER

Las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas, siendo el Sol uno de los focos de esta trayectoria elíptica. Ver figura 9.12.

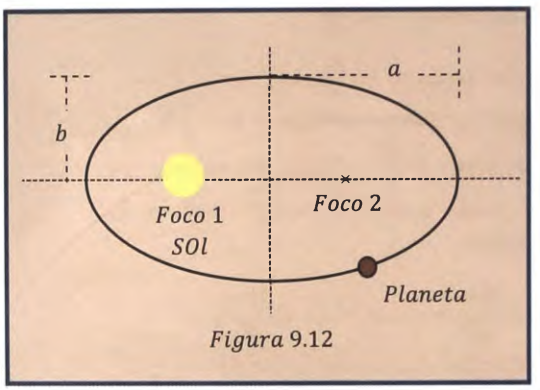


Figura 9.12

SEGUNDA LEY DE KEPLER

Los planetas orbitan alrededor del Sol barriendo áreas iguales en tiempos iguales, como puede apreciarse en la figura 9.13.

En las partes que los planetas están más alejados del Sol, los mismos se mueven con menor rapidez y cuando están más cerca del Sol se mueven con mayor rapidez.

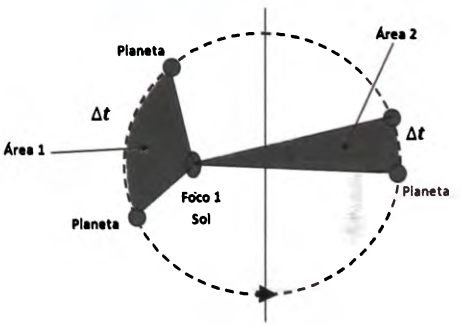


Figura 9.13

TERCERA LEY DE KEPLER

Los planetas orbitan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas cumpliendo una relación que dice:

Los periodos al cuadrado de los planetas en sus órbitas elípticas alrededor del Sol son proporcionales al cubo de su semieje mayor.

Si el Periodo es T y la distancia del semieje mayor es a.

$$T^2 \alpha\, a^3$$

La igualdad se establece con una constante de proporcionalidad K.

La constante de proporcionalidad es [K] donde $K = \frac{4\pi^2}{GM}$

Remplazando K se obtiene:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \qquad (9.8)$$

Donde G es la constante de gravitación universal $\mathrm{G} = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{N.m^2}}{\mathrm{kg^2}}$
M es la masa del Sol siempre y cuando un planeta esté orbitando alrededor de él.

La Ley de Kepler también se cumple para un satélite que orbita un planeta.

En este caso se considera r como el radio de órbita del satélite y como masa, la masa del planeta.

Ejemplo 9.11

Un planeta X orbita alrededor del Sol con un periodo T, a una distancia igual al semieje mayor "a". **Si otro planeta Y** orbita alrededor del Sol a una distancia del semieje mayor "$2a$". Determine el periodo de rotación del planeta Y.

Solución:

El periodo para el planeta X está dado por la siguiente expresión $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$

Para el planeta Y, el periodo es ${T_Y}^2 = \frac{4\pi^2}{GM}(2a)^3 = 8\left[\frac{4\pi^2}{GM} a^3\right]$

Por lo tanto, el periodo del planeta Y será $\boldsymbol{T_Y = \sqrt{8}T}$

ACTIVIDAD 9.6

Un planeta X órbita alrededor del Sol con un periodo T, a una distancia igual al semieje mayor "a". Si otro planeta Y órbita alrededor del Sol a una distancia del semieje mayor "$3a$". Determine el periodo de rotación del planeta Y en función del período T . Resp: $\boldsymbol{T_Y = 3\sqrt{3}T}$

ACTIVIDAD 9.7

El 25 de Abril de 2013, científicos ecuatorianos pusieron por primera vez en órbita un satélite ecuatoriano llamado **PEGASO**, el mismo que tiene una masa de *1.2 kg* que orbita la Tierra aproximadamente a 600 km sobre la superficie terrestre. Conociendo que el radio de la Tierra es 6.38×10^6 m y la masa de la Tierra es 5.98×10^{24} kg. Ver figura. Calcular:

a) El período de órbita de **PEGASO** alrededor de la Tierra. Resp: 5802 segundos ó 97 minutos.
b) La rapidez a la que Pegaso viajará alrededor de la Tierra. Resp: 7559.4 m/s o 27214 km/h.

PROBLEMAS

1. La fuerza gravitacional entre dos masas m_1 y m_2 es F cuando están separadas a una distancia d. Si las dos masas se triplica manteniéndose a la misma distancia. Entonces, la fuerza gravitacional entre ellas será:
   a) 2 F
   b) 3 F
   c) 5 F
   d) 9 F
2. Cuatro masas idénticas m, se encuentran en las esquinas de un cuadrado de lado "a", como se indica en la figura 9.15. Determinar la fuerza gravitacional resultante sobre una masa m, que se encuentra en el centro del cuadrado.
   a) $F = G\frac{m^2}{a^2}$
   b) $F = 4G\frac{m^2}{a^2}$
   c) $F = \sqrt{2}G\frac{m^2}{a^2}$
   d) 0

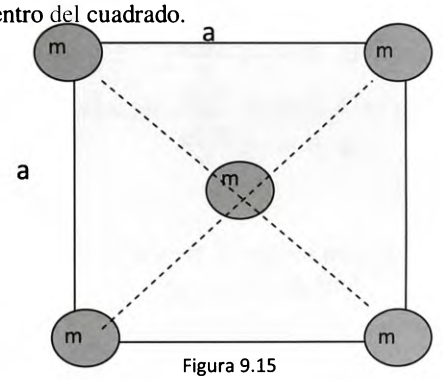


Figura 9.15

3. La aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre es g. ¿Cuál será la aceleración de la gravedad sobre la superficie de un planeta X cuya masa es la mitad de la Tierra y el radio es la mitad del radio de la Tierra.

Nota: La masa de la Tierra es M y el radio es R.

   a) g
   b) $2g$
   c) $3g$
   d) $4g$

4. La Tierra tiene una masa M y un satélite orbita la Tierra a un radio r. Entonces, la velocidad de órbita del satélite es:
   a) $v = \sqrt{\frac{GM}{2r}}$
   b) $v = \sqrt{\frac{GM}{3r}}$
   c) $v = \sqrt{\frac{GM}{3r}}$
   d) $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

5. Un satélite artificial de la NASA es puesto en órbita alrededor de la Tierra a una velocidad v y a un radio r. Si el radio de órbita se cuadriplica. Entonces, la velocidad de órbita es:
   a) $v_2 = v/2$
   b) $v_2 = v/3$
   c) $v_2 = v/4$
   d) $v_2 = v/5$

6. Se tienen dos cuerpos de masa m_1 y m_2 en el Universo, separadas a una distancia r. Entonces, la energía potencial gravitacional asociada a las dos masas es:
   a) $\mathrm{U} = -\mathrm{G}\frac{\mathrm{m_1 m_2}}{\mathrm{r}}$
   b) $U = -G\frac{m_1 m_2}{2r}$
   c) $U = -G\frac{m_1 m_2}{3r}$
   d) $U = -G\frac{m_1 m_2}{4r}$

7. Un satélite de masa m orbita la Tierra de masa M a un radio r. Entonces , la energía total del satélite es:
   a) $-G\frac{Mm}{r}$
   b) $-\mathrm{G}\frac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{2r}}$
   c) $-G\frac{Mm}{3r}$
   d) $-G\frac{Mm}{4r}$

8. Un satélite de masa m es lanzado desde la superficie de la Luna de masa M, hacia una órbita de $3r$. Si el radio de la Luna es r. ¿Cuánto trabajo se debe realizar para poner en órbita ese satélite alrededor de la Luna?.
   a) $\frac{2}{3}\mathrm{G}\frac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{r}}$
   b) $\frac{3}{2}G\frac{Mm}{r}$
   c) $\frac{1}{3}G\frac{Mm}{r}$
   d) $\frac{4}{3}G\frac{Mm}{r}$

9. Un cuerpo se suelta desde el reposo a una distancia de $4r$ del centro de un planeta X. Si el radio del planeta X es r. La velocidad con que impacta el planeta X es:

Nota: expresar la respuesta en términos de la masa, radio del planeta M, r y la constante de gravitación universal G.

a) $v = \sqrt{\frac{1GM}{2r}}$

b) $v = \sqrt{\frac{3GM}{2r}}$

c) $v = \sqrt{\frac{5GM}{2r}}$

d) $v = \sqrt{\frac{7GM}{2r}}$

10. Un satélite de masa m, orbita la Tierra de masa M a una distancia r. El periodo de rotación del satélite alrededor de la Tierra es:

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{7GM}}$

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{5GM}}$

c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{3GM}}$

d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$

11. Un planeta X, de masa M, se mueve alrededor del Sol en órbitas elípticas, con un periodo T, con una longitud del semieje mayor "a". Si un planeta Y de igual masa que el planeta X, se mueve alrededor del Sol con órbitas elípticas y con una longitud del semieje mayor de "$4a$". Entonces, el periodo de rotación del planeta Y es:

a) $T_2 = 2\,T$
b) $T_2 = 4\,T$
c) $T_2 = 6\,T$
d) $T_2 = 8\,T$

12. Si el planeta Tierra en su órbita elíptica alrededor del Sol tiene un periodo aproximado de de 365.26 días y una distancia promedio hasta el Sol de 149600000 km. Si se conoce que Marte en su órbita alrededor del Sol tiene un periodo de 686.98 días. Determinar la distancia de Marte hasta el Sol.

a) $2.28\text{x}10^{8}$ km
b) $6.295\text{x}10^{24}$ km
c) $2.51\text{x}10^{12}$ km
d) $1.14\text{x}10^{8}$ km

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

CAPÍTULO 10

INTRODUCCIÓN

Una masa atada a un resorte oscilando es un movimiento que todos hemos experimentado. Pero, hay una característica muy interesante porque es un movimiento que va hacia adelante y hacia atrás. Por lo tanto, es un movimiento en el que existe una fuerza que hace que el objeto trate siempre de dirigirse hacia su posición de equilibrio. En esta posición el resorte no está deformado. Existen muchos ejemplos de este tipo de movimiento el cual recibe el nombre de "movimiento periódico" ya que se repite periódicamente. Por ejemplo el movimiento de un niño en un columpio, las ondas de radio, un péndulo, el movimiento de una pequeña esfera en una superficie cóncava, el movimiento de los electrones en una antena las cuerdas de una guitarra y muchos otros más.

10.1 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Todos los días observamos vibraciones cuando escuchamos el sonido de una guitarra, las voces de las personas, el golpe en una puerta, etc. Todos estos significan vibraciones de objetos. En algunos casos como el movimiento de un péndulo, o una masa unida a un resorte el movimiento es armónico. Sin embargo para que un movimiento armónico sea simple se requiere que la fuerza de restitución sea directamente proporcional a la deformación.

10.2 LEY DE HOOKE

Cuando una masa se encuentra unida a un resorte, sobre una superficie horizontal, y éste no se encuentra ni comprimido ni estirado, decimos que la masa está en su posición de equilibrio. Si luego desplazamos la masa una distancia x hacia la derecha, aparece una fuerza en el resorte que trata de empujar la masa hacia la posición de equilibrio. Cuando la masa, en su movimiento hacia la izquierda pasa por la posición de equilibrio, el resorte tratará de que la masa se mueva hacia la derecha en dirección hacia la posición de equilibrio. Esta fuerza se observa que es directamente proporcional al desplazamiento de la masa y está dada por:

$$\vec{F} = -kx \qquad (10.1)$$

Esta ecuación se denomina la "ley de Hooke", donde x representa el desplazamiento de la masa con respecto a la posición de equilibrio, k es la constante de fuerza del resorte la cual depende de las características del resorte como son, el tipo de material de que está hecho el resorte, el diámetro del alambre, su longitud, etc. El signo negativo en la ley de Hooke se refiere a que la fuerza ejercida por el resorte siempre se opone al desplazamiento. Por ejemplo, si la masa está hacia la derecha con respecto a la posición de equilibrio, la fuerza del resorte es hacia la izquierda. Similarmente, si la masa se encuentra hacia la izquierda con respecto a la posición de equilibrio, la fuerza del resorte será hacia la derecha.

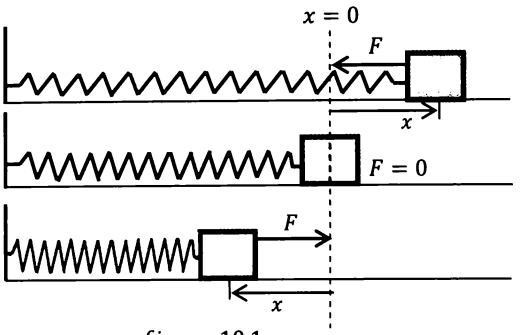


figura 10.1

Suponga que la masa es desplazada hacia la derecha de la posición de equilibrio. Cuando esta fuerza deja de actuar la fuerza restauradora (la que ejerce el resorte) actúa para que la masa retorne a su posición de equilibrio. Pero, la masa no se detiene en la posición de equilibrio sino que se mueve hacia la izquierda un desplazamiento igual al que se le dio al principio. Es decir, si hacia la derecha se desplazó 2.5 cm, la masa se desplazará hacia la izquierda 2.5 cm también. Así, el movimiento se irá repitiendo por mucho tiempo. Pero en la práctica el movimiento disminuye debido a las fuerzas de rozamiento que existe entre la masa y la superficie horizontal y también con el aire. Cuando la masa se encuentra a la izquierda de su posición de equilibrio, la fuerza restauradora actúa hacia la derecha.

PERIODO

Es el tiempo en el que la masa realiza una oscilación completa. Debe entenderse que una oscilación completa es aquella que parte del máximo desplazamiento el cual empieza a la izquierda de la posición de equilibrio hasta que vuelve a esta misma posición. El símbolo para el periodo es T.

AMPLITUD

Es el máximo desplazamiento desde la posición de equilibrio. El símbolo de la amplitud es A y sus dimensiones son de longitud.

FRECUENCIA

Es el número de oscilaciones que realiza la masa en un segundo. El símbolo para la frecuencia es f, y sus unidades son los Hertz (Hz), o $^{rev}/_{s}$, $^{vibrac}/_{s}$. La relación entre el periodo y la frecuencia es:

$$f = \frac{1}{T} \qquad (10.2)$$

FRECUENCIA ANGULAR

Es lo mismo que la frecuencia f pero sus unidades son $^{rad}/_{s}$. Si la frecuencia f está en Hz:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad (10.3)$$

La cantidad 2π transforma los Hz a radianes.

Ejemplo 10.1

Calcule la frecuencia angular si $f = 10\,^{rev}/_{s}$

Solución

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10\,^{rad}/_{s} = 20\pi\,^{rad}/_{s}$$

Observe que la cantidad $10\,^{rev}/_{s}$ se ha escrito como $2\pi \times 10\,^{rad}/_{s}$ debido a que la cantidad 2π convierte las revoluciones a radianes.

10.3 RELACIÓN ENTRE EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE Y EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME.

Suponga que una partícula gira a lo largo de una circunferencia de radio A en contra de las manecillas del reloj. Observe en la figura que la sombra que se proyecta sobre el eje de las x nos permite conocer el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de movimiento armónico simple de una partícula. Si la partícula se mueve con una velocidad angular constante ω, el ángulo que describe el radio será $\theta = \omega t$, donde t es el tiempo.

DESPLAZAMIENTO

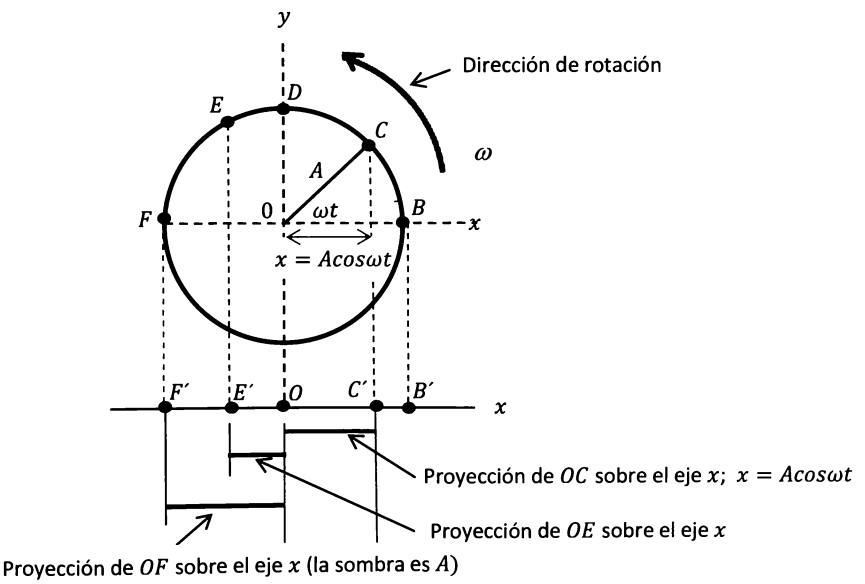


Figura 10.2

En la figura 10.2 se observa que conforme el punto B ocupa las posiciones C, D, E, F los radios $OC, OD. OE\ OF$ proyectan sobre el eje x los segmentos mostrados en la figura. Estos segmentos se denominan "proyección del radio del círculo sobre el eje x". Esta proyección está dada por $x = A\cos\omega t$, donde ωt representa el ángulo que los radios forman con el eje de las x para cada instante t donde A representa el radio del círculo.

Conforme el punto se mueve desde B hasta F en contra de las manecillas del reloj, se observa que la proyección del punto B sobre el eje de las x es igual a A (radio del círculo). Cuando la partícula se encuentra en el punto C la proyección es OC'. Cuando llega al punto D, la proyección es OD' lo cual es cero, es decir, en el punto D la partícula pasa por la posición de equilibrio.

De esta forma, la proyección sobre el eje de las x realiza un movimiento armónico simple, donde:

$$x = A\cos\omega t \qquad (10.4)$$

VELOCIDAD

Cuando una partícula realiza un movimiento circular, la velocidad es tangente a la trayectoria, y esta dirección es perpendicular al radio del círculo. En el caso del movimiento armónico simple este radio es igual a A.

La proyección del vector velocidad v_t sobre el eje de las x es igual a la componente de la velocidad en la dirección horizontal. Esto es,

$$v = -v_t sen\omega t \qquad (10.5)$$

El signo negativo se debe a que la componente de la velocidad tangencial está dirigida hacia la izquierda como se observa en la figura 10.3

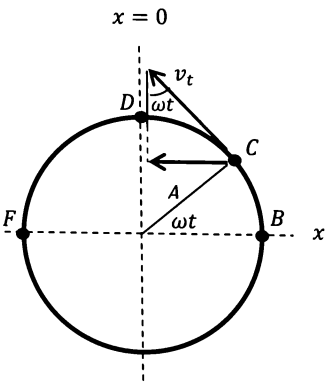


Figura 10.3

En el punto B la velocidad tangencial está dirigida hacia arriba, por lo tanto no tiene componente en la dirección horizontal. Es decir, la velocidad de la proyección en x es igual a cero. En el punto D la velocidad tangencial es horizontal y la proyección sobre el eje de las x es igual a la velocidad tangencial. Por lo tanto, en el punto D, la velocidad de la partícula en la dirección x es máxima. Esto implica que la partícula está pasando por el punto de equilibrio. En el punto F, la velocidad tangencial está dirigida hacia abajo, por lo tanto la proyección sobre el eje de las x es cero.

En el movimiento circular la velocidad tangencial está relacionada con el radio del círculo y la frecuencia angular de la forma:

$$v = \omega r \qquad (10.6)$$

En el caso del movimiento armónico simple, el radio del círculo no es r sino A, por lo tanto la velocidad tangencial es igual a :

$$v_t = \omega A$$

Así, la ecuación (10.5) queda:

$$v = -A\omega \, sen\omega t \qquad (10.7)$$

El valor v toma su valor máximo cuando el $sen\omega t$ toma su máximo valor que es 1. Por lo tanto el valor máximo de la velocidad es:

$$v_{max} = A\omega \qquad (10.8)$$

El valor máximo de la velocidad ocurre cuando la partícula está pasando por el punto de equilibrio.

Ejemplo 10.2

Un resorte tiene una constante $k = 100\,{}^{N}/_{m}$. Calcule la fuerza que se tiene que aplicar para que el resorte se estire 2.0 cm. a partir de su posición de equilibrio.

Solución:

La fuerza que se debe aplicar para estirar o comprimir un resorte está dada por la relación:

$$F = kx = 100\,{}^{N}/_{m} \times 0.02m \qquad F = 2.0N$$

$$a_{max} = -\omega^2 A \qquad (10.10)$$

La aceleración es cero en la posición de equilibrio, esto es en $x = 0$.

La aceleración para un punto cualquiera x está dado por:

$$a = -\omega^2 x \qquad (10.11)$$

Ejemplo 10.4

Calcule la aceleración de una masa unida a un resorte que vibra a $^{100}/_{\pi}$ Hz a una distancia de $^{1}/_{4}\,cm.$ de la posición de equilibrio.

Solución:

La aceleración para cualquier punto x a partir de la posición de equilibrio está dada por la ecuación (10.11).

$$a = -\omega^2 x$$

$$a = -(2\pi f)^2 x = -4\pi^2 f^2 x = -4\pi^2 \left(\frac{100}{\pi}\right)^2 \frac{0.01}{4} m$$

$$a = 100\,{}^{m}/_{s^2}$$

Ejemplo 10.5

En un sistema masa-resorte, calcule los puntos en los que la aceleración de la masa que está oscilando es máxima.

Solución:

De acuerdo a la ecuación (10.11) $a = -\omega^2 x$ se observa que la aceleración es máxima en los puntos donde la elongación del resorte es máxima, o lo que es lo mismo donde x es máxima. Recuerde que la máxima elongación se encuentra donde el desplazamiento x es igual a la amplitud.

$$a_{max} = +\omega^2 A$$

$$a_{max} = -\omega^2 A$$

Ejemplo 10.6

¿Para qué valores de x la aceleración es positiva o negativa?

Solución:

La aceleración está dada por la ecuación (10.11) $a = -\omega^2 x$. Por lo tanto, la aceleración es positiva para aquellos puntos donde x es negativa. Es decir, en estos puntos la aceleración apunta hacia la derecha. La aceleración será negativa para aquellos puntos donde x sea positiva. Es decir, los puntos que se encuentran a la derecha de $x = 0$ tienen aceleración negativa. La aceleración en estos puntos apunta hacia la izquierda.

10.4 SISTEMA MASA RESORTE

En la figura se muestra un sistema masa-resorte. Primeramente, observemos el bloque que está a la izquierda a una distancia x de la posición $x = 0$. Este bloque tiene un desplazamiento negativo, aunque la fuerza aplicada por el resorte es positiva (el resorte empuja al bloque hacia la derecha)

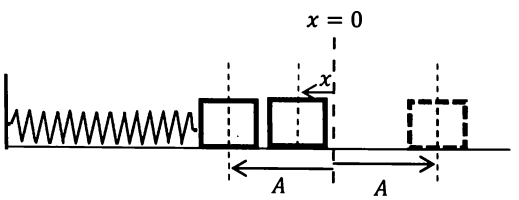


Figura 10.5

Aplicando la segunda ley de Newton,

$$\sum F = ma$$

Suponiendo que no existe fricción entre el bloque y la superficie horizontal, se puede decir que la única fuerza actuando sobre la masa es la fuerza elástica $F = -kx$.

$$-kx = ma$$

despejando a se tiene: $$a = -\frac{k}{m}x \qquad (10.12)$$

y, comparando con la ecuación (10.11) $a = -\omega^2 x$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (10.13)$$

de esta expresión se puede hallar el periodo del sistema masa-resorte.

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (10.14)$$

De la ecuación 2.14 se observa que cuando la masa es grande el periodo del movimiento aumenta. Y, si el resorte tiene una constante grande el periodo disminuye.

Ejemplo 10.7

Una masa de $m = 0.5kg$ se ata a un resorte de constante $k = 50.0\pi^2\ {}^{N}/_{m}$. Calcule la frecuencia y el periodo.

Solución:

Para calcular la frecuencia de oscilación se usa la ecuación (10.13) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Reemplazando $\omega = 2\pi f$ se tiene: $2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{50.0\pi^2\ {}^{N}/_{m}}{0.5kg}}$$

Resolviendo: $f = 5.0Hz$

Para calcular el periodo usamos la ecuación $T = \frac{1}{f}$

$$T = \frac{1}{5.0s^{-1}} \qquad T = 0.2s$$

10.5 PÉNDULO SIMPLE

El péndulo simple oscila con un movimiento armónico. Sin embargo, sólo si el desplazamiento angular es pequeño el péndulo realiza un movimiento armónico simple.

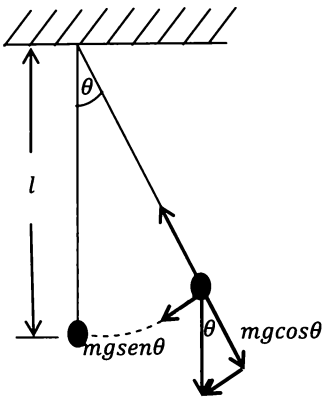


Figura 10.6

La fuerza $mgsen\theta$ hace el papel de la fuerza restauradora y es negativa ya que el ángulo es positivo.

Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección tangencial queda:

$$-mgsen\theta = ma \qquad (10.15)$$

Si el desplazamiento θ es pequeño se puede usar la aproximación de que $sen\theta \cong \theta$. Este último expresado en radianes. El arco se puede expresar como: $x = l\theta$, por lo tanto $\theta = {}^{x}/_{l}$

De la ecuación (10.15): $-mg\theta = ma$

Y remplazando $\theta = {}^{x}/_{l}$

$$-mg\frac{x}{l} = ma \qquad a = -\frac{g}{l}x$$

Comparando con la ecuación (10.11) $a = -\omega^2 x$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (10.16)$$

Esta última ecuación nos da la frecuencia angular en función de la longitud del péndulo y de la aceleración de la gravedad.

Ejemplo 10.8

De la ecuación (10.16) deduzca una expresión para la frecuencia y para el periodo del péndulo simple.

Solución:

La expresión $\omega = 2\pi f$ debe ser remplazada en la ecuación (10.16)

$$2\pi f = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{10.17}$$

Esta expresión representa la frecuencia de un péndulo simple. Para calcular el periodo usamos la expresión $T = {}^{1}/_{f}$ en la ecuación anterior

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{10.18}$$

Esta expresión representa el periodo de un péndulo simple. En un experimento muy sencillo se puede medir el periodo por medio un cronómetro y medir la longitud de la cuerda. Con estos datos se puede calcular la aceleración de la gravedad de la Tierra usando la ecuación (10.18).

10.6 CONSIDERACIONES ENERGÉTICAS EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Para el sistema masa-resorte se analizará la forma de las gráficas que el resorte ejerce sobre la masa m y la fuerza que se ejerce sobre el resorte por un agente externo. Este agente externo es el que hace que el resorte se estire o se comprima. Por lo tanto la fuerza que ejerce el resorte debe ser igual en magnitud y opuesta en dirección con respecto a la fuerza que se hace sobre el resorte para deformarlo. A continuación, se muestran las dos gráficas.

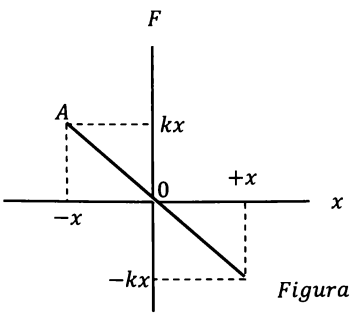


Figura 10.7

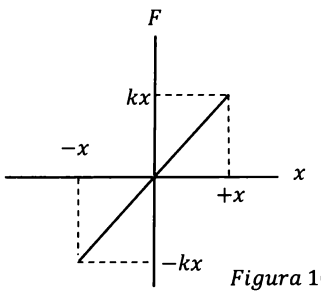


Figura 10.8

La figura (10.7) representa la fuerza que hace el resorte en función del desplazamiento. Observe que en la zona donde x es negativo, la fuerza F es positiva. Por lo tanto:

$$F = -kx \qquad (10.19)$$

donde F es la fuerza que ejerce el resorte y x el desplazamiento de la masa.

La figura (10.8) representa la fuerza que un agente externo ejerce sobre un resorte. Observe que cuando x es negativo la fuerza F también es negativa y que cuando x es positivo la fuerza F también es positiva. Por lo tanto:

$$F = +kx \qquad (10.20)$$

donde F es la fuerza que se ejerce sobre el resorte.

Figura 10.9

En la figura (10.9) la mano hala al resorte para estirarlo. En este caso decimos que un agente externo actúa sobre el resorte.

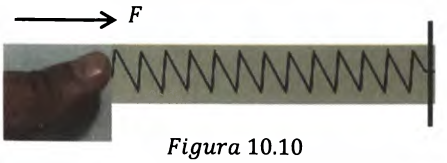


Figura 10.10

En la figura (10.10) la mano empuja al resorte para comprimirlo. En este caso decimos que un agente externo actúa sobre el resorte.

Observe que en las dos figuras anteriores la fuerza tiene la misma dirección que el desplazamiento, por lo tanto: $F = +kx$

Ahora veremos a un resorte ejerciendo una fuerza sobre una masa m.

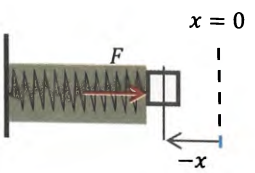


Figura 10.11

En la figura (10.11) el resorte está comprimido y por lo tanto ejerce una fuerza hacia la derecha. Observe que el desplazamiento es hacia la izquierda. Así, cuando F es positiva, x es negativa.

En el caso en que el resorte esté estirado, la fuerza que ejerce el resorte será hacia la posición de equilibrio, y si F es positiva, x será negativo como en la figura (10.12)

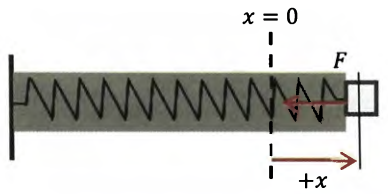


Figura 10.12

En la figura (10.12) el resorte está estirado y por lo tanto el desplazamiento x es positivo. Sin embargo, como el resorte está estirado, éste ejercerá una fuerza hacia la izquierda. Entonces, se observa que la fuerza es negativa y el desplazamiento es positivo. Así:

$$F = -kx$$

Donde F es la fuerza ejercida por el resorte.

TRABAJO HECHO SOBRE UN RESORTE

El gráfico mostrado es el mismo de la figura 10.8

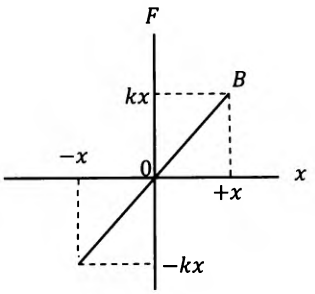


Figura 10.13

El trabajo que se ejerce sobre el resorte representa el área bajo la curva $F\ vs.\ x$ mostrado en la figura. El área OBX tiene un área igual a:

$$A = \frac{1}{2}kx^2$$

Así el trabajo cuando se hala al resorte desde la posición de equilibrio hasta un desplazamiento $+x$ es igual al área bajo la curva $F\ vs.\ t$ y es el trabajo realizado por la fuerza F.

$$W_F = \frac{1}{2}k\,x^2 \qquad (10.21)$$

Donde W_F es el trabajo hecho por el agente externo sobre el resorte.

Suponga que la masa se halla en la posición $x = 0$ y halamos el resorte hasta $x = +x_{max}$. Como la fuerza aplicada es hacia la derecha y el desplazamiento es también hacia la derecha, el trabajo hecho por el agente externo es positivo tal como lo muestra la ecuación (10.21)

TRABAJO HECHO POR UN RESORTE

Suponga que un resorte está comprimido hasta $x = -x_{max.}$ Cuando el resorte se estira desde $-x_{max}$ hasta $x = 0$, el trabajo hecho por el resorte es positivo, porque la fuerza es hacia la derecha y el bloque se desplaza hacia derecha también.

$$W_{res} = +\frac{1}{2}kx_{\max}^2 \qquad (10.22)$$

Si ahora el resorte se mueve desde $x = 0$ hasta $x = +x_{max}$ la fuerza que hace el resorte sobre la masa es hacia la izquierda pero la masa se desplaza hacia la derecha, por lo tanto el trabajo es negativo,

$$W_{res} = -\frac{1}{2}kx_{\max}^2 \qquad (1023)$$

Entonces, el trabajo hecho por el resorte al mover la masa m desde $x = -x_{max}$ hasta $x = +x_{max}$ es:

$$W_{res} = +\frac{1}{2}kx_{\max}^2 - \frac{1}{2}kx_{\max}^2$$

Lo cual es igual a cero.

$$W_{res} = 0 \qquad (10.24)$$

A la cantidad $\frac{1}{2}kx^2$ se le denomina energía potencial elástica.

Aplicando el teorema del trabajo y la energía que dice que "el trabajo neto es igual al cambio de energía cinética"

$$W_{neto} = \Delta K = K_{final} - K_{inicial}$$

donde K es la energía cinética la cual el igual a: $K = \frac{1}{2}mv^2$

$$W_{neto} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \qquad (10.25)$$

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

El trabajo neto es: $-\Delta U$ donde U se denomina energía potencial gravitacional. Así:

$$-\Delta U = \Delta K \qquad (10.26)$$

donde $U = mgh$ como se vio en el capítulo sobre trabajo y energía.

En el caso de que el movimiento sea horizontal, $\Delta U = 0$. Sin embargo ΔU también representa energía potencial elástica.

$$\Delta U_{elastica} = \frac{1}{2}kx^2$$

(10.27)

Las unidades de la energía cinética, de la energía potencial gravitacional y de la energía potencial elástica en el SI es el *Joule* (J).

De la ecuación (10.26) se tiene que:

$$\Delta U + \Delta K = 0$$

(10.28)

a esta expresión se le denomina "conservación de la energía mecánica" que también puede expresarse de la siguiente manera:

$$(U_f - U_i) + (K_f - K_i) = 0$$

Reordenando:

$$U_i + K_i = U_f + K_f \qquad (10.29)$$

A esta ecuación se la conoce como "conservación de la energía mecánica". En esta ecuación U puede representar energía potencial gravitacional, energía potencial elástica, o ambas.

CÁLCULO DE LA ENERGÍA TOTAL

La energía total es igual a la suma de la energía potencial más la energía cinética.

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

Esto implica que la energía total consta de una parte de energía cinética y el resto de energía potencial elástica. Por lo tanto, si la energía cinética es máxima, entonces la energía potencial elástica será cero. O, si la energía cinética es cero, la energía potencial elástica será máxima.

$$E = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2$$

O también:

$$E = \frac{1}{2}kx_{\text{max}}^2$$

Debido que x_{max} es igual a la amplitud A la energía total puede expresarse como:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Entonces, la energía total queda así:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \qquad (10.30)$$

CÁLCULO DE LA VELOCIDAD

De la ecuación (10.30) despejaremos la velocidad.

$$mv^2 = kA^2 - kx^2$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} \qquad (10.31)$$

Esta ecuación expresa la velocidad de la partícula para cualquier posición x de la masa en el sistema masa-resorte. Observe que cuando la posición de la partícula es igual a la amplitud, es decir, cuando $x = A$, la velocidad de la masa es cero. De esto se concluye que la masa se detiene cuando ésta se encuentra en los puntos extremos. Los puntos extremos son: $-x_{max}$ y $+x_{max}$.

En la posición de equilibrio, esto es en $x = 0$, la velocidad de la masa es:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}A^2} = A\omega$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación (10.8), por lo tanto $v = v_{max}$. Cuando la masa pasa por la posición de equilibrio su rapidez es máxima. En la posición de equilibrio sólo existe energía cinética. Por lo tanto, la energía potencial elástica es igual a cero en ese punto. Esto es comprensible ya que en $x = 0$ el resorte no está ni comprimido ni alargado.

Ejemplo 10.9

Una masa de 36.0 kg se cuelga de un resorte y provoca un desplazamiento de 10.0 cm. Luego, se estira el resorte 10.0 cm adicionales y se suelta. ($cos50\pi = 0.96$). Calcule:

a) Su desplazamiento después de 5.0 segundos.
b) Su velocidad máxima.
c) Su aceleración máxima.
d) Su velocidad a los 5.0 segundos.
e) Su aceleración a los 5.0 segundos.

Solución:

El desplazamiento está dado por $x = Acos\omega t$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$; como no se conoce k procederemos a calcularla.

$$k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{36.0kg \times 10\,m/s^2}{0.10m} \qquad k = 3\,600\,N/m \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3\,600\frac{N}{m}}{36.0kg}} = 10.0\frac{rad}{s}$$

a) $x = 0.1cos\left(10\frac{rad}{s} \times 5s\right) = 0.1\cos(50rad) \qquad x = 0.096m = 9.6cm$

b) Cuando se cuelga el peso de *36.0 kg* el resorte se estira *10.0 cm* y llega al reposo. Luego, se estiran *10.0 cm* adicionales, por lo tanto la amplitud es de *10.0 cm*

$v_{max} = A\omega = 0.10m \times 10.0\,rad/s \qquad v_{max} = 1.0\,m/s$

c) $a_{max} = A\omega^2 = 0.10m \times \left(10\,rad/s\right)^2 \qquad a_{max} = 10\,m/s^2$

d) En el literal (a) se encontró que a los *5.0 s*, el desplazamiento es de *0.096 m*.

Usando la ecuación (10.31) $v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}$

$$v = \sqrt{\frac{3600\,N/m}{36.0kg}\left(0.10^2 - 0.096^2\right)m^2} \qquad v = \sqrt{0.078}\,m/s$$

e) Usando la ecuación: $a = -\omega^2 x$

$$a = -\left(10.0\,rad/s\right)^2 \times 0.096m \qquad a = -9.6\,m/s^2$$

Ejemplo 10.10

Un bloque de 3.6 kg se une al extremo de un resorte liviano y se observa que vibra a 5.0Hz. ¿Cuál será la frecuencia de vibración si se une al mismo resorte una masa de 10.0kg?

Solución:

Tomemos $m_1 = 3.6kg \quad m_2 = 10.0kg \quad$ y $\quad f_1 = 5.0Hz$

Como se trata del mismo resorte las constantes del resorte son iguales. Aplicando la ecuación

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ para la masa m_1 :

$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}}$ para la masa m_1 :

$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_2}}$ para la masa m_2 :

Dividiendo f_2 para f_1 se obtiene:

$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$ despejando f_2 se obtiene: $f_2 = f_1\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \qquad f_2 = 5.0Hz\sqrt{\frac{3.6}{10.0}}$

$$f_2 = 3.0Hz$$

Ejemplo 10.11

¿Cuál debería ser la longitud de un péndulo simple para que su periodo sea de *1.0s* en la superficie de la Tierra?

Solución:

Aplicando la ecuación (10.18) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ y depejando l se tiene:

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{10^{m}/_{s^2} \times (1.0s)^2}{4\pi^2} \qquad l = \frac{2.5}{\pi^2} m$$

Ejemplo 10.12

Una masa $m = 1.0kg$ atada a un resorte vibra con una frecuencia de 20 Hz. Si la energía cinética máxima del resorte es de $50\pi^2$ J, ¿Cuál es la amplitud de oscilación?

Solución:

Primero debemos calcular la frecuencia angular ω y luego aplicar la relación $v_{max} = A\omega$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 20\frac{rad}{s} = 40\pi\, {rad}/{s}$$

$K_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = 50\pi^2$ despejando v_{max}: $v_{max} = \sqrt{\frac{2\times 50\pi^2 J}{1.0kg}}$ $v_{max} = 10\pi\, {m}/{s}$

Como $v_{max} = A\omega$ despejamos A: $A = \frac{v_{max}}{\omega} = \frac{10\pi\, {m}/{s}}{40\pi\, {rad}/{s}}$ $A = 0.25m$

Ejemplo 10.13

Un resorte que se encuentra sobre una superficie horizontal tiene una constante de fuerza de 100N/m. Una masa de 0.5 kg se une a un extremo del resorte mientras el otro extremo se encuentra fijo. Si la masa se comprime una distancia de 10.0 cm a partir de su posición de equilibrio y se suelta,

a) ¿Cuál es su energía potencial elástica para $x = 10cm$?
b) ¿Cuál es su energía cinética máxima?
c) Cuando el resorte pasa por la posición $x = 0.5m$ ¿ a qué es igual la suma de su energía cinética potencial más su energía potencial elástica?

Solución:

Para responder la pregunta (a) se debe usar la fórmula: $U = {1}/{2}\, kx^2$

a) $U = \frac{1}{2}\left(100\, {N}/{m}\right)(0.10m)^2 = 0.5J$

Para responder la pregunta (b) $k_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2$ donde $v_{max} = A\omega = 2\pi Af$, lo cual implica realizar algunos cálculos ya que la frecuencia no es un dato del problema sino que hay que calcularla, $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. en lugar de hacer todo esto, se puede usar el concepto de que:

b) $$K + U = \frac{1}{2}kA^2$$

donde K es energía cinética y k es la constante del resorte.

De esto se deduce que si la energía potencial elástica es cero, entonces la energía cinética es máxima. Así: $K_{max} = \frac{1}{2}kA^2$.

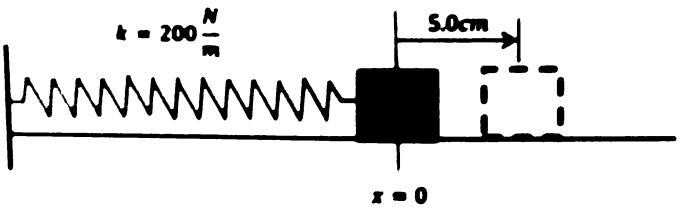
c) $K_{max} = \frac{1}{2}\left(100 N/m\right)(0.10m)^2 = 0.5J$ (esta es la energía máxima del m.a.s.)

Observe que en el literal (a) se calculó la energía potencial para $x = 10\ cm$. Aquí, $10cm$ es igual a la amplitud. La energía potencial que se halló fue de $0.5J$, y como la energía máxima es 0.5 J de acuerdo al literal (c), se concluye que para $x = 10\ cm$, la energía cinética es cero.

PROBLEMAS

1 Un resorte se cuelga de un soporte y su posición es vertical. Si del extremo libre se cuelga una masa de 5.00kg, y se observa que el resorte se estira una distancia $x = 2.00cm$, calcule la constante elástica del resorte. Exprese su respuesta en N/m.

2 Se coloca un resorte sobre una mesa horizontal sin fricción. Una masa m es colocada en su posición de equilibrio (cuando el resorte está sin deformación). Si la masa es movida hacia la derecha una distancia de $5.00\ cm$ a partir de la posición de equilibrio y es soltada desde el reposo, la masa ejecuta un movimiento armónico simple. Se pide:



Posición de equilibrio

Figura 10.14

a) La amplitud del movimiento.
b) Indicar en qué punto la velocidad de la masa es máxima.
c) Indicar en qué punto la velocidad de la masa es mínima.
d) Indicar en qué región la velocidad es positiva.
e) Indicar en qué región la velocidad es negativa.
f) Indicar en qué región la aceleración es positiva.
g) Indicar en qué región la aceleración es negativa. .

3. Para el gráfico del problema 2:
   a) ¿Cuál es la fuerza externa que se ejerce sobre el bloque para que se mantenga en reposo a 5.0 cm a partir de su punto de equilibrio?
   b) ¿Cuál es la fuerza que ejerce el resorte sobre el bloque en la posición mostrada en la figura?
   c) Calcular la frecuencia angular del movimiento.
   d) ¿Cuál es el valor de la aceleración en $x = +2.0cm$; $x = 0.0cm$; $x = -2.0cm$.
   e) Calcular el periodo del movimiento.
   f) ¿Para qué valor de x la velocidad de la masa es $\frac{1}{2}mv_{max}^2$?
   g) ¿Para qué valor de x la aceleración de la masa es a_{max}?
4. Si k es la constante elástica de un resorte y A es la amplitud, entonces la energía cinética máxima será:
   a) $\frac{1}{2}mv^2$
   b) $\frac{1}{2}kA^2$
   c) $\frac{1}{2}kx^2$
   d) mgh
5. Del gráfico del problema # 2, calcule la energía potencial elástica para $x = 2.00cm$, y la energía cinética para $x = 2.00cm$. Luego , calcule la energía total para $x = 2.00cm$.
6. De gráfico del problema # 2, calcule la energía total máxima del movimiento. Compare esta respuesta con aquella del problema # 5.
7. Suponga que en el laboratorio usted tiene un péndulo simple (masa y longitud conocidas) y un cronómetro. ¿Qué debería hacer para medir la aceleración de la gravedad?
8. ¿Cuál es la longitud que debería tener un péndulo simple para que su periodo sea igual a una hora? $m = 1.0kg$; $k = 200\,{}^{N}/_{m}$
9. ¿Cuál es la longitud de un péndulo simple de masa *3.0 kg* si el tiempo que demora en realizar una oscilación completa es de $1.0s$?
10. Un sistema masa – resorte oscila con una frecuencia de 5.0 Hz, ¿Cuál es la Amplitud del movimiento si la velocidad máxima del oscilador es de $12.6.\,{}^{m}/_{s}$?
11. Un oscilador armónico vibra de acuerdo al movimiento dado por:

$$x = (3.0\,sen 10\pi\, t)\,\text{cm}$$

Calcule, la amplitud del movimiento, la frecuencia, y el periodo.

12. Un oscilador armónico vibra de acuerdo a la ecuación;

$$v = \left(30\pi \cos {}^{10}/_{\pi}\, t\right) {}^{cm}/_{s}$$

Calcule la velocidad máxima.

13. Un oscilador armónico vibra de acuerdo a:

$$a = (1500sen10\pi\, t)^{cm}/_{s^2}$$

Calcule la aceleración máxima.

14. Para qué valor del tiempo, el desplazamiento x es máximo si un oscilador armónico vibra de acuerdo a: $x = (3.0sen2\pi t)\ cm$
15. Para qué valor del tiempo la velocidad es máxima si un oscilador armónico vibra de acuerdo a: $v = \left(5.0cos\,{}^{\pi}/_{2}\, t\right)\ {}^{cm}/_{s}$
16. Para qué valor del tiempo la aceleración a es cero, si un oscilador amónico vibra de acuerdo a: $a = \left(120sen\ {}^{\pi}/_{4}\, t\right)^{cm}/_{s^2}$
17. En la Vía Láctea, (nuestra galaxia), se ha encontrado un planeta en la que un péndulo de 2.0 metros de longitud tiene un periodo de π segundos. ¿Cuál la aceleración de la gravedad en ese planeta?
18. Un sistema masa-resorte oscila con un periodo de 0.1π segundos cuando una masa de 200 gramos es unida a uno de sus extremos. Si su energía total es de 0.4 J,
    a) Calcule la constante del resorte
    b) Calcule la amplitud del movimiento
    c) Calcule la máxima velocidad
19. Suponga que el periodo de un péndulo simple en la Tierra es de 1.0 s. ¿Cuál será el periodo del mismo péndulo en la Luna donde la gravedad es ${}^{1}/_{6}$ que el de la Tierra?

RESPUESTAS

CAPÍTULO 1

1. d
2. d
3. c
4. d
5. c
6. c
7. d
8. d
9. c
10. a
11. a
12. b
13. a
14. 2.88 lb. ; 1307.5g
15. a
16. c
17. b
18. b

19. Ordenar las siguientes cantidades físicas de menor a mayor y completa la tabla adjunta.
mm, cm, dm,m, dam,hm, km

10^{-3} m	10^{-2} m	10^{-1} m	10^{0} m	10^{+1} m	10^{+2} m	10^{+3} m
Mm	cm	dm	m	dam	hm	km

20. a) 2.04 m b) 2.07 m
21. a) 1.02 m b) 4.00 lb
22. a) 1.10 g b) 4.08 m
23. a) 3.11 kg b) 2.15 s c) 15.21 m d) 5.01 N
24. a
25. a
26. 16m; 7m; $2 \times 10^{1} m^{2}$
27. a) 2; b) 2 ; c) 3 ; d) 6
28. c
29. a
30. b
31. 3; 3; 4; 2; 2; 6
32. c
33. d
34. b

CAPÍTULO 2

2.1. d
2.2 $^{2}/_{3}$
2-3 d
2.4 NO
2.5 c
2.6 c
2.8 c
2.9 e
2.10 b
2.11 e
2.12 e
2.13 d
2.14 b
2.15 a
2.16 a
2.17 a
2.18 e
2.19 d
2.20 c
2.21. d
2.22 $\sqrt{2}$; $\frac{5}{\sqrt{2}}$
2.23 164.8^{0}
2.24. $20\hat{\imath} - 3.5\hat{\jmath} - 21\hat{k}$
2.25. c
2.26. b
2.27. 705m; 56.6^{0} al sur del oeste.
2.28. 360.6m; 56.3^{0} al norte del este
2.29. T_a =717.4 N; T_b = 878.6 N
2.30. 2418N; 18^{0}con respecto a $\vec{F}_2$
2.31. 3464 m; 0; 7464 m.
2.32. $19.2u^{2}$
2.33. $-30\hat{\jmath} + 35\hat{k}$ o cualquier múltiplo o submúltiplo.
2.34. 56.7^{0}
2.35. $39.6u^{2}$; $\alpha = 65.9^{0}$; $\beta = 35.3^{0}$; $\gamma = 65.9^{0}$
2.36. $30\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} - 21\hat{k}$
2.37. 10.54 N; 348.6^{0}
2.38. 10 u; 200^{0}
2.39. 80^{0}
2.40. 42.2^{0}; $\alpha = 21.4^{0}$ $\beta = 94.1^{0}$ $\gamma = 69.0^{0}$
2.41. $4.16\hat{\imath} - 5.64\hat{\jmath} + 3.86\hat{k}$
2.42. 26.6^{0}
2.43. 7.66 u
2.44. $-3.87\hat{\imath} - 3.27\hat{\jmath} + 8.63\hat{k}$
2.45 $59.7u^{2}$

CAPÍTULO 3

1. Las dos piedras llegan con la misma rapidez.
2. Negativa
3. Negativa
4. $-g$
5. Igual a $-g$
6. Alcanzan igual altura.
7. Es negativa
8. Negativa
9. 500 m
10. 14 km
11. 1.5 s
12. 200 m
13. 200 m
14. 120 km
15. 15 s
16. a) 20 km/h; b) 120 km/h; c) 100 km/h
17. 18s
18. $a = -800\ ^{m}/_{s^2}$
19. $v_m = +6\ ^{m}/_{s}$
20. 200 m
21. 10 s
22. A) 180 m; b) 198 m; c) +9m/s; d) 9.9 m/s
23. v = -38 m/s
24. (c)
25. (c)
26. 10 s
27. (a)
28. (a)
29. (b)
30. (d)
31. (e)
32. (b)

CAPÍTULO 4

1. c) 25.00 m/s
2. d) 5.00 s
3. a) No sufre daño alguno porque su rapidez de impacto es 67m/s
   b) 200 m
4. a) No
   b) 613.14 m
5. a) $\theta=79.5^0$ o $\theta=14.1^0$
   b) $\theta= 79.6^0$
6. a) 16.65 m/s
   b) 1.67 s
7. a) 9.13 m/s; 36.9^0
   b) 2m
   c) 0.55 s
   d) 7.30 m/s
8. a) La primera canica
   b) 1/4
   c) $\theta=6.25^0$
   d) La segunda canica
   e) 0.75
   f) 25.6^0
9. a) 76.0^0
10. a) 30 Hz
    b) 60π rad/s
    c) 600π rad
    d) $360\pi^2$ m/s^2
11. a) 2 rad/s^2
    b) 100 rads
    c) 3m/s
    d) 60 m/s^2
    e) 0.3 m/s^2
12. a) 33.72 m/s; $\theta=51^0$ al Norte del Este.

CAPÍTULO 5

5.1 $a = 5.0\,{}^{m}/_{s^2}$

5.2 $a = 2.5\,{}^{m}/_{s^2}$

5.3 F = 40 N

5.4 $a = 6\,{}^{m}/_{s^2}$ T = 12N

5.5 $a = 15\,{}^{m}/_{s^2}$

5.6 $F_c = 16N$; $a = 4\,{}^{m}/_{s^2}$

5.7 $F_c = 60N$; $a=4{}^{m}/_{s^2}$

5.8 F = 50.0N

5.9 T = 120.0N

5.10 $a = 5.0\,{}^{m}/_{s^2}$

5.11 5 personas

5.12 75.0 N

5.13 F = 50.0N; $\theta = 223^0$

5.14 $a = 2\,{}^{m}/_{s^2}$

5.15 $a = g\tan\theta$

5.16 N = 12.66N; $a = 8\,{}^{m}/_{s^2}$

5.17 F = 75.0N

5.18 100 N

5.19 F = 22.0N

5.20 (c)

5.21. $a_c = 4.0\,{}^{m}/_{s^2}$

5.22. T=4.0N

5.23. $v = \left(\frac{gL\tan\theta}{2}\right)^{0.5}$

5.24. T = 20N

5.25. $\mu_s = 0.45$

5.26. $\tan\theta = {}^{v^2}/_{(gR)} = 0.45$

5.27. $v = 20\,{}^{m}/_{s}$

5.28. v = 21m/s

5.29. r = 40m

5.30. $v_B = 4.0\,{}^{m}/_{s}$

5.31. $a_c = {}^{4\pi^2 R}/_{T^2}$

5.32. (a)

5.33. $v = 300\,{}^{m}/_{s}$

5.34. $v = 10\,{}^{m}/_{s}$; T = 25N; no se rompe.

5.35. $T_{arriba} = m\left(\frac{v_{arr}^2}{L} - g\right)$; $T_{aba} = m\left(\frac{v_{aba}^2}{L} + mg\right)$

5.36. $v = 6.0 \times 10^{-3}\,{}^{m}/_{s}$

5.37 $a = 20\,{}^{m}/_{s^2}$

5.38 (c)

5.39 (a)

5.40 (d)

5.41 (b)

5.42 (c)

CAPÍTULO 6

1. 320 J
2. 250 J
3. 1/9
4. 0 J
5. 160 J
6. a) 3000 J; -750 J b) 2250 J
7. 40 J
8. 3.3 m/s
9. 0.171 m
10. 10 m/s
11. 40.82 m/s; 83.3 m y 45.46 m/s
12. -4 J; -50 J; -17 J y -71 J
13. 480 J
14. -150 J
15. $\sqrt{20}\frac{m}{s}$
16. 0.54 m
17. 8 m
18. 10 m/s; $10\sqrt{2}\frac{m}{s}$

CAPÍTULO 7

1. No, porque la cantidad de movimiento es un vector.
2. Puede viajar en el vacío y no necesita aire excepto para la combustión.
3. L a velocidad del hombre es -0.1m/s
4. 30 000 kgm/s dirigido hacia el norte.
5. Las dos bolas se moverán en la misma dirección en que se movía la bola de masa 2m.
6. la cantidad de movimiento del objeto A varía
7. 250.0N
8. Se conserva la cantidad de movimiento del sistema
9. 9 000 kg
10. 2.5 m/s
11. 3 kg.m/s
12. 3 kg.m/s
13. 60.0 N
14. 30.0 kg.m/s
15. 10 m/s
16. $10\sqrt{3}\,m/s$
17. 200 m/s
18. Hacia la izquierda
19. Bola pequeña -1.47 m/s; bola grande: +0.15 m/s
20. $\theta = 36.9^0$ $v_3 = 5\,m/s$

CAPÍTULO 8

1. d
2. d
3. b
4. c
5. a
6. a
7. d
8. a
9. d
10. b
11. d
12. d
13. d
14. c
15. c
16. a
17. a
18. b

CAPÍTULO 9

1) d) 9F
2) d) 0
3) b) 2g
4) d) $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$
5) a) $v_2 = v/2$
6) a) $-G\frac{Mm}{r}$
7) a) $-G\frac{Mm}{2r}$
8) a) $\frac{2}{3}G\frac{Mm}{r}$
9) b) $v = \sqrt{\frac{3GM}{2r}}$
10) d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$
11) d) $T_2 = 8T$
12) a) 2.28×10^8 km

CAPÍTULO 10

10.1 2500 N/m

10.2 a) 5.0 cm; b) x = 0; c) x=+5.0cm, x=-5.0cm; d) cuando m se mueve hacia la derecha; e) cuando m se mueve hacia la izquierda; f) para x = negativo; g) x =positivo.

10.3 a)F = 20N; b) F − 20N; c) $\omega 10\ ^{rad}/_{s}$; d) $-2.0\ ^{m}/_{s^2}$; $0\ ^{m}/_{s^2}$; $+2.0\ ^{m}/_{s^2}$; e) $T = 0.63s$; f) x = 0; g) x=5.0cm y x)-5.0 cm.

10.4 (b)

10.5 $U_{elas} = 0.08J$; K = 0.42J; E = 0.5J

10.6 U = 0.04J; K = 0.21J; E = 0.25J

10.7 Usar $T = 2\pi\sqrt{l/g}$; $g = \frac{4\pi^2}{}$

10.8 893.7m

10.9 0.25m

10.10 0.40m

10.11 3.0 cm; 5Hz; 0.2s

10.12 $30\pi\ ^{cm}/_{s}$

10.13 $1500^{cm}/_{s^2}$

10.14 0.25s

10.15 4.0s

10.16 4.0s

10.17 $8\ ^{m}/_{s^2}$

10.18 (a) 80 N/m; (b) 0.1 m; (c) 2.0m/s

10.19 6.0s

ISBN 978-9942-11-362-7